

Kurt Meyberg · Peter Vachenauer

# Höhere Mathematik 1

Differential- und Integralrechnung  
Vektor- und Matrizenrechnung

Zweite, korrigierte Auflage  
Mit 444 Abbildungen

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York  
London Paris Tokyo  
Hong Kong Barcelona  
Budapest

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel 1. Zahlen und Vektoren</b> .....	1
§1. Mengen und Abbildungen.....	1
1.1 Mengen – 1.2 Mengenoperationen – 1.3 Abbildungen	
§2. Die reellen Zahlen.....	3
2.1 Bezeichnungen – 2.2 Ungleichungen – 2.3 Intervalle – 2.4 Schranken – 2.5 Der Betrag – 2.6 Die vollständige Induktion – 2.7 Binomialkoeffizienten und die binomische Formel – Aufgaben	
§3. Die Ebene.....	11
3.1 Kartesische Koordinatensysteme – 3.2 Winkel – 3.3 Sinus, Cosinus – 3.4 Drehungen	
§4. Vektoren.....	17
4.1 Kartesische Koordinatensysteme im Raum – 4.2 Vektoren – 4.3 Die Addition von Vektoren – 4.4 Die skalaren Vielfachen eines Vektors – 4.5 Der Betrag – 4.6 Vektoren im Koordinatensystem	
§5. Produkte.....	22
5.1 Der Winkel zwischen zwei Vektoren – 5.2 Das Skalarprodukt – 5.3 Das Vektorprodukt – 5.4 Das Spatprodukt – Aufgaben	
§6. Geraden und Ebenen.....	34
6.1 Parameterdarstellungen einer Geraden – 6.2 Die Koordinatengleichungen einer Geraden – 6.3 Die Momentengleichung der Geraden – 6.4 Abstand Punkt-Gerade – 6.5 Abstand Gerade-Gerade – 6.6 Parameterdarstellungen einer Ebene – 6.7 Parameterfreie Darstellungen einer Ebene – 6.8 Die Gerade als Schnitt zweier Ebenen – 6.9 Die Winkel zwischen zwei Ebenen und zwischen einer Ebene und einer Geraden – Aufgaben	
§7. Gebundene Vektoren.....	47
7.1 Gebundene Vektoren – 7.2 Ein System gebundener Vektoren – 7.3 Die Reduktion eines Systems gebundener Vektoren – Aufgaben	
§8. Die komplexen Zahlen.....	53
8.1 Die Menge der komplexen Zahlen – 8.2 Die vier Grundrechenarten in $\mathbb{C}$ – 8.3 Die Konjugation und der Betrag komplexer Zahlen – 8.4 Anwendungen	

<b>Kapitel 2. Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit</b> .....	58
<b>§1. Funktionen (Grundbegriffe)</b> .....	58
1.1 Funktionen – 1.2 Monotonie – 1.3 Das Rechnen mit Funktionen	
<b>§2. Polynome und rationale Funktionen</b> .....	61
2.1 Polynome – 2.2 Polynomnullstellen – Faktorisierung – 2.3 Polynom- interpolation – 2.4 Der Graph – 2.5 Rationale Funktionen, Polynomdi- vision – 2.6 Der Definitionsbereich $D$ – 2.7 Ergänzung: Polynome über $\mathbb{C}$ – Aufgaben	
<b>§3. Die Kreisfunktionen</b> .....	75
3.1 Definition und einfache Eigenschaften – 3.2 Die Tangens- und Cotangensfunktion – 3.3 Die Polardarstellung komplexer Zahlen – 3.4 Anwendungen der De Moivre-Formeln – 3.5 Harmonische Schwin- gungen – Aufgaben	
<b>§4. Zahlenfolgen und Grenzwerte</b> .....	88
4.1 Folgen – 4.2 Definition des Grenzwerts; konvergente Zahlenfolgen	
<b>§5. Rechenregeln für Grenzwerte und Konvergenzkriterien</b> .....	93
5.1 Rechenregeln – 5.2 Grenzwertbestimmung durch Abschätzung – 5.3 Monotone Folgen – 5.4 Die Exponentialfunktion – 5.5 Für Fortge- schrittene: Das Cauchy-Konvergenzkriterium – Aufgaben	
<b>§6. Funktionengrenzwerte, Stetigkeit</b> .....	103
6.1 Definitionen – 6.2 Die 6 elementaren Methoden der Grenzwertbe- stimmung – 6.3 Asymptoten – 6.4 Stetigkeit – Aufgaben	
<b>Kapitel 3. Differentiation</b> .....	112
<b>§1. Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion</b> .....	112
1.1 Die Definition der Ableitung – 1.2 Die geometrische Deutung der Ableitung: Tangentenanstieg – 1.3 Die analytische Deutung der Ab- leitung: Lineare Approximation – 1.4 Die physikalische Deutung der Ableitung: Geschwindigkeit – 1.5 Stetigkeit ist notwendig für Differen- zierbarkeit – 1.6 Differentiationsregeln – 1.7 Die Differentiation der Polynome und der rationalen Funktionen – 1.8 Die Ableitung der Kreisfunktionen – 1.9 Die Kettenregel – 1.10 Höhere Ableitungen – Aufgaben	
<b>§2. Anwendungen der Differentiation</b> .....	121
2.1 Maxima und Minima einer Funktion – 2.2 Der Mittelwertsatz – 2.3 Wendepunkte – 2.4 Die Regeln von De L'Hospital – 2.5 Kurven- diskussion – 2.6 Nullstellen und Fixpunkte – 2.7 Kubische Splines – Aufgaben	

<b>§3. Umkehrfunktionen</b> .....	139
3.1 Grundlagen – 3.2 $n$ -te Wurzel, rationale Exponenten – 3.3 Arcussinus, Arcuscosinus, Arcustangens – Aufgaben	
<b>§4. Die Exponential- und Logarithmusfunktion</b> .....	147
4.1 Die $e$ -Funktion – 4.2 Die Kurve $y = e^x$ – 4.3 Exponentiell wachsende bzw. fallende Prozesse – 4.4 Der natürliche Logarithmus – 4.5 Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen – 4.6 Die Hyperbelfunktionen $\sinh$ , $\cosh$ , $\tanh$ – Aufgaben	
<b>Kapitel 4. Integration</b> .....	161
<b>§1. Das bestimmte Integral</b> .....	161
1.1 Die Definition des bestimmten Integrals – 1.2 Die geometrische Deutung – 1.3 Elementare Integrationsregeln und der Mittelwertsatz – 1.4 Differentiation und Integration – Aufgaben	
<b>§2. Integrationsregeln</b> .....	169
2.1 Linearität – 2.2 Partielle Integration – 2.3 Die Substitutionsmethode – 2.4 Symmetrien beachten – 2.5 Ausblicke – Aufgaben	
<b>§3. Die Integration der rationalen Funktionen</b> .....	179
3.1 Die Partialbruchzerlegung – 3.2 Die Integration – 3.3 Die Integration von $R(e^x)$ – 3.4 Die Integration von $R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)$ , $ae-bc \neq 0$ – 3.5 Die Integration von $R(\sin x, \cos x)$ – 3.6 Trigonometrische und hyperbolische Substitutionen – Aufgaben	
<b>§4. Uneigentliche Integrale</b> .....	185
4.1 Die Definition der uneigentlichen Integrale – 4.2 Ein Konvergenz-Test – 4.3 Ein an beiden Grenzen uneigentliches Integral – 4.4 Ausnahmestellen im Innern des Integrationsintervalls – Aufgaben	
<b>§5. Kurven, Längen- und Flächenmessung</b> .....	190
5.1 Die Parameterdarstellung – 5.2 Tangente und Normale – 5.3 Kurvenlänge – 5.4 Krümmung und Krümmungskreis – 5.5 Die Polardarstellung einer ebenen Kurve – 5.6 Flächeninhalte – Aufgaben	
<b>§6. Weitere Anwendungen des Integrals</b> .....	204
6.1 Abkürzende Redeweisen – 6.2 Das Volumen eines Rotationskörpers – 6.3 Die Mantelfläche – Aufgaben	
<b>§7. Numerische Integration</b> .....	206
Aufgaben	

<b>Kapitel 5. Potenzreihen</b> .....	212
§1. <b>Unendliche Reihen</b> .....	212
1.1 Grundbegriffe – 1.2 Absolute Konvergenz – Aufgaben	
§2. <b>Reihen von Funktionen</b> .....	221
2.1 Gleichmäßige Konvergenz – 2.2 Gleichmäßig konvergente Funktionenreihen – Aufgaben	
§3. <b>Potenzreihen</b> .....	226
3.1 Der Konvergenzradius – 3.2 Berechnung des Konvergenzradius – 3.3 Die Differentiation und Integration von Potenzreihen – 3.4 Die Potenzreihendarstellung einiger Funktionen – 3.5 Die Binomialreihe – 3.6 Potenzreihen mit dem Zentrum $a \neq 0$ – 3.7 Koeffizientenvergleich – Aufgaben	
§4. <b>Der Satz von Taylor; Taylor-Reihen</b> .....	237
4.1 Die Taylor-Formel – 4.2 Die Taylor-Reihe – 4.3 Methoden der Reihenentwicklung – Aufgaben	
§5. <b>Anwendungen (an Beispielen)</b> .....	244
5.1 Grenzwertberechnungen – 5.2 Näherungsformeln (Approximation) – 5.3 Die Reihendarstellung und Berechnung einer Integralfunktion mit nicht elementar integrierbarem Integranden – 5.4 Potenzreihenansatz zur Lösung einfacher Differentialgleichungen – Aufgaben	
<b>Kapitel 6. Lineare Algebra</b> .....	250
§1. <b>Lineare Gleichungssysteme und Matrizen</b> .....	250
1.1 Was ist eine Matrix? – 1.2 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einem Zahlenfaktor – 1.3 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen – 1.4 Das Gaußsche Lösungsverfahren – Aufgaben	
§2. <b>Die Matrizenmultiplikation</b> .....	265
2.1 „Zeile mal Spalte“ – 2.2 Die Multiplikation zweier Matrizen – 2.3 Rechenregeln – 2.4 Die Transponierte einer Matrix – 2.5 Invertierbare Matrizen – 2.6 Diagonal- und Dreiecksmatrizen – Aufgaben	
§3. <b>Vektorräume</b> .....	274
3.1 Der „abstrakte“ Vektorraum – 3.2 Unterräume, Linearkombinationen, lineare Hülle – 3.3 Basis und Dimension – Aufgaben	
§4. <b>Elementarmatrizen und elementare Umformungen</b> .....	286
4.1 Zeilenraum und Spaltenraum – 4.2 Elementarmatrizen – 4.3 Der Rang und die $P$ - $Q$ -Normalform – 4.4 Rechenverfahren – Aufgaben	

<b>§5. Determinanten</b> .....	299
5.1 Einführung – 5.2 Definition der Determinante einer $n \times n$ -Matrix –	
5.3 Rechenregeln für Determinanten – 5.4 Die Entwicklung von $\det A$	
nach einer beliebigen Zeile oder Spalte – 5.5 Beispiele – 5.6 Anwen-	
dungen – Aufgaben	
<b>§6. Lineare Abbildungen und Eigenwerte</b> .....	311
6.1 Lineare Abbildungen – 6.2 $V = W = \mathbb{R}^n$ – 6.3 Längen und Winkel	
im $\mathbb{R}^n$ ; Orthogonalität – 6.4 Speziell: Spiegelungen und Drehungen	
– 6.5 Das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren – 6.6 Basiswechsel,	
Koordinatentransformation – 6.7 Eigenwerte, Eigenvektoren – 6.8 Die	
orthogonale Gruppe – Aufgaben	
<b>§7. Symmetrische Matrizen und quadratische Formen</b> .....	339
7.1 Quadratische Formen – 7.2 Die Hauptachsentransformation –	
7.3 Quadriken – 7.4 Die nichtorthogonale Diagonalisierung einer sym-	
metrischen Matrix – 7.5 Positiv definite Matrizen – Aufgaben	
<b>Kapitel 7. Funktionen in mehreren Variablen: Differentiation</b> .....	359
<b>§1. Kurven im <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	360
1.1 Parameterdarstellungen – 1.2 Das begleitende Dreibein, Krümmung,	
Torsion – 1.3 Ergänzung: Der natürliche Parameter und die Frenet-	
schen Formeln – Aufgaben	
<b>§2. Reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher</b> .....	370
2.1 Grundlagen – 2.2 Grenzwerte und Stetigkeit – 2.3 Partielle Ablei-	
tungen, der Gradient – 2.4 Die totale Ableitung und lineare Approximi-	
ation – 2.5 Einfache Anwendungen – 2.6 Die Richtungsableitung, der	
Anstieg und die Kettenregel – Aufgaben	
<b>§3. Anwendungen der Differentiation</b> .....	391
3.1 Die Bedeutung des Gradienten – 3.2 Approximation höherer Ord-	
nung; die Taylor-Formel – 3.3 Implizite Funktionen – 3.4 Lokale Mi-	
nima und Maxima – 3.5 Ausgleichsrechnung – 3.6 Extremwertaufgaben	
mit Nebenbedingungen – Aufgaben	
<b>§4. Vektorwertige Funktionen</b> .....	418
4.1 Die Differentiation – 4.2 Die Kettenregel – 4.3 Räumliche Skalaren-	
und Vektorfelder – 4.4 Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace-	
Operator – Aufgaben	

<b>Kapitel 8. Funktionen in mehreren Variablen: Integration .....</b>	<b>430</b>
§1. Parameterintegrale .....	430
1.1 Parameterintegrale – Aufgaben	
§2. Kurvenintegrale .....	435
2.1 Das Kurvenintegral einer skalaren Funktion – 2.2 Anwendungen – 2.3 Die Integration eines Vektorfeldes längs einer Kurve – 2.4 An- wendungen und Beispiele – 2.5 Das Potential eines Gradientenfeldes – 2.6 Die praktische Bestimmung eines Potentials ( $n = 3$ ) – Aufgaben	
§3. Die Integration über ebene Bereiche .....	454
3.1 Der Flächeninhalt – 3.2 Definition und einfache Eigenschaften des Doppelintegrals – 3.3 Die Berechnung des Doppelintegrals in kartesi- schen Koordinaten – 3.4 Weitere Anwendungen und Beispiele – 3.5 Der Satz von Green – Aufgaben	
§4. Die Integration über Flächen im Raum .....	467
4.1 Parameterdarstellungen – 4.2 Beispiele – 4.3 Der Flächeninhalt – 4.4 Das Oberflächenintegral einer skalaren Funktion – 4.5 Die Trans- formationsformel für Gebietsintegrale – 4.6 Das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes – 4.7 Der Satz von Stokes – Aufgaben	
§5. Die Integration über dreidimensionale Bereiche .....	488
5.1 Definition und einfache Eigenschaften des Dreifachintegrals – 5.2 Einfache Anwendungsbeispiele – 5.3 Die Transformationsformel für Volumenintegrale – 5.4 Der Divergenzsatz – 5.5 Einige Anwendungen der Integralsätze – 5.6 Orthogonale krummlinige Koordinaten – Auf- gaben	
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>505</b>
<b>Anhang: Pascal-Programme .....</b>	<b>507</b>
<b>Namen- und Sachverzeichnis .....</b>	<b>517</b>

## Verzeichnis der Programme

1. Programm HORNER .....	63
Auswertung eines Polynoms mit dem Horner-Schema	
2. Programm HORNER vollstaendig .....	63
Entwicklung eines Polynoms nach Potenzen von $x - b$	

3.	Programm NEWTON Interpolation.....	68
	Berechnung und Auswertung des Newton Interpolationspolynoms	
4.	Programm BISECTION.....	109
	Nullstellenbestimmung ( $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ )	
5.	Programm NEWTON Verfahren.....	134
	Nullstellenbestimmung ( $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ )	
6.	Programm KUBISCHE SPLINE.....	136
	Interpolation mit kubischer Spline-Funktion	
7.	Programm ROMBERG Integration.....	209
	Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$ mittels Romberg-Extrapolation	
8.	Programm Vollst. Ellipt. Integrale.....	211
	Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale $E(k)$ und $K(k)$ mit arithmetisch-geometrischem Mittel	
9.	Programm GAUSS.....	296
	Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit verbesserter LR- Zerlegung, Berechnung der Determinante von $A$	
10.	Programm LEVERRIER.....	333
	Berechnung der Koeffizienten des Polynoms $p(\lambda) = \det(\lambda E - A)$	
11.	Programm JACOBI.....	354
	Berechnung aller Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix	
12.	Programm BAIRSTOW.....	384
	Berechnung aller komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms	
13.	Procedure LINFIT.....	406
	Bestimmung der Ausgleichslösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems	
14.	Programm NLSQ.....	407
	Bestimmung der Ausgleichslösung eines überbestimmten nichtlinearen Gleichungssystems	