

# Inhaltsverzeichnis

|  |            |
|--|------------|
| <b>I Vektorrechnung</b>                                  | <b>1</b>   |
| 1 Einführung und Grunddefinitionen . . . . .             | 1          |
| 2 Das Skalarprodukt . . . . .                            | 3          |
| 3 Komponentendarstellung eines Vektors . . . . .         | 6          |
| 4 Das Vektorprodukt (axialer Vektor) . . . . .           | 9          |
| 5 Das Spatprodukt . . . . .                              | 20         |
| 6 Anwendung der Vektorrechnung . . . . .                 | 22         |
| 7 Differentiation und Integration von Vektoren . . . . . | 34         |
| 8 Das begleitende Dreibein . . . . .                     | 45         |
| 9 Flächen im Raum . . . . .                              | 61         |
| 10 Koordinatensysteme . . . . .                          | 64         |
| 11 Vektorielle Differentialoperationen . . . . .         | 79         |
| 12 Bestimmung von Linienintegralen . . . . .             | 106        |
| 13 Die Integralsätze von Gauß und Stokes . . . . .       | 109        |
| 14 Berechnung von Oberflächenintegralen . . . . .        | 121        |
| 15 Volumen (Raum)-Integrale . . . . .                    | 125        |
| <b>II Newtonsche Mechanik</b>                            | <b>129</b> |
| 16 Die Newtonschen Axiome . . . . .                      | 129        |
| 17 Grundbegriffe der Mechanik . . . . .                  | 135        |
| x 18 Die allgemeine lineare Bewegung . . . . .           | 154        |
| ↗ 19 Der freie Fall . . . . .                            | 157        |

|                                    |  |         |
|------------------------------------|--|---------|
| x 20                               | Die Reibung . . . . .  | 166     |
| ✓ 21                               | Der harmonische Oszillator . . . . .   | 192     |
| 22                                 | Mathematische Zwischenbetrachtung (Reihenentwicklung, Eulersche Formeln) . . . . . | 206     |
| x 23                               | Der gedämpfte harmonische Oszillator . . . . .                                     | 209     |
| x 24                               | Das Pendel . . . . .   | 225     |
| 25                                 | Mathematische Vertiefung: Differentialgleichungen . . . . .                        | 240     |
| x 26                               | Planetenbewegungen . . . . .   | 245     |
| 27                                 | Spezielle Probleme in Zentralfeldern . . . . .                                     | 281     |
| x 28                               | Die Erde und unser Sonnensystem . . . . .  | 294     |
| <br><b>III Relativitätstheorie</b> |  | <br>335 |
| 29                                 | Relativitätsprinzip und Michelson-Versuch . . . . .                                | 335     |
| 30                                 | Die Lorentz-Transformation . . . . .   | 343     |
| 31                                 | Eigenschaften der Lorentz-Transformation . . . . .                                 | 361     |
| 32                                 | Additionstheorem der Geschwindigkeiten . . . . .                                   | 393     |
| 33                                 | Die Grundgrößen der Mechanik im Minkowski-Raum . . . . .                           | 399     |
| 34                                 | Anwendungen der speziellen Relativitätstheorie . . . . .                           | 436     |

# Aufgaben und Beispiele

|           |      |   |    |
|-----------|------|---|----|
| Aufgabe:  | 3.1  | Addition und Subtraktion von Vektoren . . . . .                                 | 8  |
| Aufgabe:  | 4.1  | Vektorprodukt . . . . .   | 15 |
| Aufgabe:  | 4.2  | Determinanten . . . . .   | 16 |
| Aufgabe:  | 4.3  | Beweis von Determinantenregeln . . . . .  | 17 |
| Beispiel: | 4.4  | Laplacescher Entwicklungssatz . . . . .   | 19 |
| Aufgabe:  | 6.1  | Abstandsvektor . . . . .  | 22 |
| Aufgabe:  | 6.2  | Projektion eines Vektors auf einen anderen . . . . .                            | 22 |
| Aufgabe:  | 6.3  | Geraden- und Ebenengleichung . . . . .  | 23 |
| Beispiel: | 6.4  | Der Kosinussatz . . . . .   | 23 |
| Beispiel: | 6.5  | Der Satz von Thales . . . . .   | 24 |
| Beispiel: | 6.6  | Die Drehmatrix . . . . .  | 25 |
| Aufgabe:  | 6.7  | Überlagerung von Kräften . . . . .  | 27 |
| Beispiel: | 6.8  | Gleichgewichtsbedingung für einen starren Körper ohne feste Drehachse . . . . . | 28 |
| Aufgabe:  | 6.9  | Kraft und Drehmoment . . . . .  | 29 |
| Aufgabe:  | 6.10 | Stabkräfte im Dreibock . . . . .  | 31 |
| Aufgabe:  | 6.11 | Gesamtkraft und Drehmoment . . . . .  | 33 |
| Beispiel: | 7.1  | Differentiation eines Vektors . . . . .   | 35 |
| Beispiel: | 7.2  | Differentiation eines Produktes aus Skalar und Vektor . . . . .                 | 37 |
| Aufgabe:  | 7.3  | Geschwindigkeit und Beschleunigung auf einer Raumkurve                          | 38 |
| Beispiel: | 7.4  | Kreisbewegung . . . . .   | 39 |
| Beispiel: | 7.5  | Schraubenlinie . . . . .  | 40 |
| Beispiel: | 7.6  | Integration eines Vektors . . . . .   | 41 |
| Aufgabe:  | 7.7  | Integration eines Vektors . . . . .   | 42 |
| Aufgabe:  | 7.8  | Bewegung auf einer Raumkurve . . . . .  | 42 |
| Aufgabe:  | 7.9  | Bewegung auf einer Raumkurve . . . . .  | 44 |
| Aufgabe:  | 8.1  | Krümmung und Torsion . . . . .  | 52 |
| Beispiel: | 8.2  | Frenetsche Formeln am Kreis . . . . .   | 52 |
| Beispiel: | 8.3  | Begleitendes Dreibein und Schraubenlinie . . . . .                              | 54 |
| Beispiel: | 8.4  | Evolvente eines Kreises . . . . .   | 58 |
| Aufgabe:  | 8.5  | Bogenlänge . . . . .  | 58 |
| Beispiel: | 8.6  | Verallgemeinerung der Evolute . . . . .   | 59 |

|           |       |  |     |
|-----------|-------|--|-----|
| Beispiel: | 9.1   | Normalenvektor einer Fläche im Raum . . . . .                            | 63  |
| Aufgabe:  | 10.1  | Zur Geschwindigkeit und Beschleunigung in Zylinderkoordinaten . . . . .  | 75  |
| Aufgabe:  | 10.2  | Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten . . . . .               | 77  |
| Aufgabe:  | 10.3  | Winkelgeschwindigkeit und Radialbeschleunigung . . . . .                 | 78  |
| Aufgabe:  | 11.1  | Gradient eines Skalarfeldes . . . . .                                    | 88  |
| Aufgabe:  | 11.2  | Bestimmung des Skalarfeldes aus dem zugehörigen Gradientenfeld . . . . . | 88  |
| Aufgabe:  | 11.3  | Divergenz eines Vektorfeldes . . . . .                                   | 88  |
| Aufgabe:  | 11.4  | Rotation eines Vektorfeldes . . . . .                                    | 89  |
| Aufgabe:  | 11.5  | Elektrische Feldstärke, elektrisches Potential . . . . .                 | 89  |
| Aufgabe:  | 11.6  | Differentialoperationen in Kugelkoordinaten . . . . .                    | 90  |
| Aufgabe:  | 11.7  | Reziprokes Dreibein . . . . .  | 96  |
| Aufgabe:  | 11.8  | Reziproke Koordinatensysteme . . . . .                                   | 97  |
| Beispiel: | 12.1  | Linienintegral über ein Vektorfeld . . . . .                             | 108 |
| Aufgabe:  | 13.1  | Wegunabhängigkeit eines Linienintegrals . . . . .                        | 115 |
| Aufgabe:  | 13.2  | Bestimmung der Potentialfunktion . . . . .                               | 118 |
| Aufgabe:  | 13.3  | Wirbelfluß eines Kraftfeldes durch eine Halbkugel . . . . .              | 119 |
| Aufgabe:  | 13.4  | Zum konservativen Kraftfeld . . . . .                                    | 120 |
| Beispiel: | 14.1  | Zur Berechnung eines Oberflächenintegrals . . . . .                      | 122 |
| Aufgabe:  | 14.2  | Fluß durch eine Oberfläche . . . . .                                     | 124 |
| Beispiel: | 15.1  | Berechnung eines Volumenintegrals . . . . .                              | 126 |
| Aufgabe:  | 15.2  | Berechnung einer Gesamtkraft aus der Kraftdichte . . . . .               | 127 |
| Aufgabe:  | 16.1  | Einfache Seilrolle . . . . .   | 132 |
| Aufgabe:  | 16.2  | Doppelte Seilrolle . . . . .   | 133 |
| Beispiel: | 17.1  | Potentielle Energie . . . . .  | 138 |
| Aufgabe:  | 17.2  | Impulsstoß durch zeitabhängiges Kraftfeld . . . . .                      | 140 |
| Aufgabe:  | 17.3  | Kraftstoß . . . . .  | 141 |
| Aufgabe:  | 17.4  | Das ballistische Pendel . . . . .  | 142 |
| Beispiel: | 17.5  | Kräfte bei der Bewegung auf einer Ellipse . . . . .                      | 145 |
| Aufgabe:  | 17.6  | Berechnung von Drehimpuls und Drehmoment . . . . .                       | 147 |
| Aufgabe:  | 17.7  | Nachweis, daß ein gegebenes Kraftfeld konservativ ist . . . . .          | 148 |
| Aufgabe:  | 17.8  | Kraftfeld, Potential, Gesamtenergie . . . . .                            | 148 |
| Aufgabe:  | 17.9  | Impuls und Kraft auf einen Rammpfahl . . . . .                           | 149 |
| Beispiel: | 17.10 | Elementare Betrachtungen über Scheinkräfte . . . . .                     | 151 |
| Aufgabe:  | 19.1  | Bewegung einer Masse im konstanten Kraftfeld . . . . .                   | 160 |
| Aufgabe:  | 19.2  | Bewegung auf einer Schraubenlinie im Schwerefeld . . . . .               | 163 |
| Aufgabe:  | 19.3  | Raumschiff umkreist Erde . . . . .                                       | 166 |

|               |          |   |         |
|---------------|----------|---|---------|
| Beispiel:     | 20.1     | Freier Fall mit Reibung nach Stokes . . . . .                               | 168     |
| Beispiel:     | 20.2     | Der schräge Wurf mit Reibung nach Stokes . . . . .                          | 170     |
| Aufgabe:      | 20.3     | Freier Fall mit Newtonscher Reibung . . . . .                               | 176     |
| Aufgabe:      | 20.4     | Bewegung einer Lokomotive mit Reibung . . . . .                             | 179     |
| Beispiel:     | 20.5     | Die schiefe Ebene . . . . .   | 180     |
| Aufgabe:      | 20.6     | Zwei Massen auf schießen Ebenen . . . . .                                   | 182     |
| Aufgabe:      | 20.7     | Eine Kette rutscht vom Tisch . . . . .                                      | 183     |
| Aufgabe:      | 20.8     | Eine Scheibe auf Eis – der Reibungskoeffizient . . . . .                    | 186     |
| Aufgabe:      | 20.9     | Ein Autounfall . . . . .  | 187     |
| Aufgabe:      | 20.10    | Ein Teilchen auf einer Kugel . . . . .                                      | 188     |
| Aufgabe:      | 20.11    | Eine Leiter lehnt an einer Wand . . . . .                                   | 190     |
| Aufgabe:      | 20.12    | Eine Masse rutscht unter Haft- und Gleitreibung . . . . .                   | 191     |
| <br>Aufgabe:  | <br>21.1 | <br>Amplitude, Frequenz und Periode einer harmonischen Schwingung . . . . . | <br>199 |
| Aufgabe:      | 21.2     | Massa hängt an Feder . . . . .  | 201     |
| Aufgabe:      | 21.3     | Schwingung einer Masse an einer ausgelenkten Feder . . . . .                | 201     |
| Aufgabe:      | 21.4     | Schwingung eines schwimmenden Zylinders . . . . .                           | 202     |
| Aufgabe:      | 21.5     | Massa hängt an zwei Federn und schwingt . . . . .                           | 202     |
| Aufgabe:      | 21.6     | Zusammengesetzte Federn . . . . .   | 204     |
| Aufgabe:      | 21.7     | Schwingung eines drehbar gelagerten Stabes . . . . .                        | 205     |
| <br>Aufgabe:  | <br>22.1 | <br>Zur Taylorreihe . . . . .   | <br>208 |
| Aufgabe:      | 23.1     | Gedämpfte Schwingung eines Teilchens . . . . .                              | 219     |
| Aufgabe:      | 23.2     | Harmonische Oszillatior wird von außen erregt . . . . .                     | 222     |
| Aufgabe:      | 23.3     | Massenpunkt in der $x$ - $y$ -Ebene . . . . .                               | 223     |
| <br>Aufgabe:  | <br>24.1 | <br>Die Zykloide . . . . .  | <br>230 |
| Aufgabe:      | 24.2     | Das Zykloidenpendel . . . . .   | 231     |
| Aufgabe:      | 24.3     | Eine Perle gleitet auf einer Zykloide . . . . .                             | 233     |
| Aufgabe:      | 24.4     | Das Problem der Tautochrone . . . . .                                       | 234     |
| Aufgabe:      | 24.5     | Bewegung einer Peitschenschnur . . . . .                                    | 237     |
| <br>Beispiel: | <br>26.1 | <br>Das Cavendish Experiment . . . . .                                      | <br>252 |
| Aufgabe:      | 26.2     | Kraftgesetz einer Kreisbahn . . . . .                                       | 265     |
| Aufgabe:      | 26.3     | Kraftgesetz einer Spiralbahn . . . . .                                      | 266     |
| Aufgabe:      | 26.4     | Die Lemniskatenbahn . . . . .   | 267     |
| Aufgabe:      | 26.5     | Fluchtgeschwindigkeit auf der Erde . . . . .                                | 268     |
| Aufgabe:      | 26.6     | Das Raketenproblem . . . . .  | 269     |
| Aufgabe:      | 26.7     | Bewegungsgleichungen einer Zweistufenrakete . . . . .                       | 271     |
| Aufgabe:      | 26.8     | Kondensation eines Wassertropfens . . . . .                                 | 272     |
| Aufgabe:      | 26.9     | Bewegung eines Lastwagens mit variabler Ladung . . . . .                    | 273     |
| Aufgabe:      | 26.10    | Bahn eines Kometen . . . . .  | 274     |
| Aufgabe:      | 26.11    | Bewegung im Zentralfeld . . . . .   | 276     |
| Aufgabe:      | 26.12    | Meerwasser als Raketenantrieb . . . . .                                     | 279     |

|           |       |  |     |
|-----------|-------|--|-----|
| Beispiel: | 26.13 | Geschichtliche Bemerkung zur Vertiefung . . . . .                    | 279 |
| Aufgabe:  | 27.1  | Gravitationskraft eines homogenen Stabes . . . . .                   | 285 |
| Aufgabe:  | 27.2  | Gravitationskraft einer homogenen Scheibe . . . . .                  | 286 |
| Aufgabe:  | 27.3  | Gravitationspotential einer Hohlkugel . . . . .                      | 287 |
| Aufgabe:  | 27.4  | Tunnel durch die Erde . . . . .                                      | 288 |
| Aufgabe:  | 27.5  | Stabilität einer Kreisbahn . . . . .                                 | 293 |
| Aufgabe:  | 27.6  | Stabilität einer Kreisbahn . . . . .                                 | 294 |
| Aufgabe:  | 28.1  | Massenakkretion der Sonne . . . . .                                  | 316 |
| Beispiel: | 28.2  | Bewegung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld der Sonne . . . . . | 317 |
| Beispiel: | 28.3  | Ausflug zu den äußen Planeten . . . . .                              | 319 |
| Aufgabe:  | 28.4  | Periheldrehung . . . . .   | 331 |
| Aufgabe:  | 30.1  | Lorenz-Invarianz der Wellengleichung . . . . .                       | 356 |
| Aufgabe:  | 31.1  | Klassische Längenkontraktion . . . . .                               | 363 |
| Aufgabe:  | 31.2  | Der Begriff der Gleichzeitigkeit . . . . .                           | 363 |
| Aufgabe:  | 31.3  | Zur Längenkontraktion . . . . .                                      | 364 |
| Beispiel: | 31.4  | Zerfall der $\mu$ -Mesonen . . . . .                                 | 365 |
| Aufgabe:  | 31.5  | Zur Zeitdilatation . . . . .   | 366 |
| Aufgabe:  | 31.6  | Relativität der Gleichzeitigkeit . . . . .                           | 367 |
| Aufgabe:  | 31.7  | Zur Lorentz-Transformation . . . . .                                 | 392 |
| Beispiel: | 33.1  | Konstruktion der Viererkraft durch Lorentz-Transformation            | 404 |
| Beispiel: | 33.2  | Der Einsteinsche Kasten . . . . .                                    | 409 |
| Beispiel: | 33.3  | Zum Massenzuwachs mit der Geschwindigkeit . . . . .                  | 411 |
| Aufgabe:  | 33.4  | Relativistischer Massenzuwachs . . . . .                             | 413 |
| Aufgabe:  | 33.5  | Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfeld . . . . .                  | 414 |
| Aufgabe:  | 33.6  | Massenverlust der Sonne durch Strahlung . . . . .                    | 423 |
| Aufgabe:  | 33.7  | Geschwindigkeitsabhängigkeit der Protonenmasse . . . . .             | 424 |
| Aufgabe:  | 33.8  | Effektivität eines funktionierenden Fusionsreaktors . . . . .        | 425 |
| Aufgabe:  | 33.9  | Zerfall des $\tau$ -Mesons . . . . .                                 | 426 |
| Aufgabe:  | 33.10 | Lebensdauer der $K^+$ -Mesonen . . . . .                             | 427 |
| Aufgabe:  | 33.11 | Zur Kernspaltung . . . . .   | 429 |
| Aufgabe:  | 33.12 | Masse – Energie –Äquivalenz am Beispiel des $\tau^0$ -Mesons         | 430 |
| Aufgabe:  | 33.13 | Zur Paarvernichtung . . . . .  | 431 |
| Aufgabe:  | 33.14 | Kinetische Energie des Photons . . . . .                             | 432 |
| Aufgabe:  | 33.15 | Das sogenannte „Zwillingsparadoxon“ . . . . .                        | 433 |
| Aufgabe:  | 33.16 | Kinetische Energie eines relativistischen Teilchens . . . . .        | 435 |
| Aufgabe:  | 34.1  | Die relativistische Rakete . . . . .                                 | 444 |
| Aufgabe:  | 34.2  | Die Photonenrakete . . . . .   | 446 |
| Aufgabe:  | 34.3  | Das relativistische Zentralkraftproblem . . . . .                    | 447 |
| Aufgabe:  | 34.4  | Beispiel zur Vertiefung: Gravitationslinsen . . . . .                | 450 |