

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Kapitel IX Elemente der Maßtheorie	
1 Meßbare Räume	3
σ-Algebren	3
Die Borelsche σ -Algebra	5
Das zweite Abzählbarkeitsaxiom	6
Erzeugung der Borelschen σ -Algebra durch Intervalle	8
Basen topologischer Räume	10
Die Produkttopologie	11
Produkte Borelscher σ -Algebren	12
Die Meßbarkeit von Schnitten	14
2 Maße	17
Mengenfunktionen	17
Maßräume	18
Eigenschaften von Maßen	18
Nullmengen	20
3 Äußere Maße	24
Die Konstruktion äußerer Maße	24
Das Lebesguesche äußere Maß	25
Lebesgue-Stieltjessche äußere Maße	28
Hausdorffsche äußere Maße	29
4 Meßbare Mengen	32
Motivation	32
Die σ -Algebra der μ^* -meßbaren Mengen	33
Lebesguesche und Hausdorffsche Maße	35
Metrische Maße	36
5 Das Lebesguesche Maß	41
Der Lebesguesche Maßraum	41
Die Regularität des Lebesgueschen Maßes	42

Eine Charakterisierung Lebesgue meßbarer Mengen	45
Bilder Lebesgue meßbarer Mengen	46
Die Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes	48
Eine Charakterisierung des Lebesgueschen Maßes	49
Die Bewegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes	51
Der spezielle Transformationssatz	53
Nicht Lebesgue meßbare Mengen	55

Kapitel X Integrationstheorie

1 Meßbare Funktionen	64
Einfache und meßbare Funktionen	64
Ein Meßbarkeitskriterium	66
Meßbare numerische Funktionen	69
Der Verband der meßbaren numerischen Funktionen	71
Punktweise Grenzwerte meßbarer Funktionen	75
Radonmaße	76
2 Integrierbare Funktionen	83
Das Integral für einfache Funktionen	83
Die \mathcal{L}_1 -Seminorm	85
Das Bochner-Lebesguesche Integral	87
Die Vollständigkeit von \mathcal{L}_1	90
Elementare Eigenschaften des Integrals	91
Konvergenz in \mathcal{L}_1	95
3 Konvergenzsätze	100
Integration nichtnegativer numerischer Funktionen	100
Der Satz über die monotone Konvergenz	103
Das Lemma von Fatou	104
Integration numerischer Funktionen	107
Der Satz von Lebesgue	107
Parameterintegrale	110
4 Die Lebesgueschen Räume	114
Wesentlich beschränkte Funktionen	114
Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung	115
Die Vollständigkeit der Lebesgueschen Räume	118
L_p -Räume	121
Stetige Funktionen mit kompaktem Träger	123
Einbettungen	125
Stetige Linearformen auf L_p	127

5 Das n-dimensionale Bochner-Lebesguesche Integral	133
Lebesguesche Maßräume	133
Das Lebesguesche Integral für absolut integrierbare Funktionen	135
Eine Charakterisierung Riemann integrierbarer Funktionen	138
6 Der Satz von Fubini	143
Fast-überall definierte Abbildungen	143
Das Cavalierische Prinzip	144
Anwendungen des Cavalierischen Prinzips	147
Der Satz von Tonelli	150
Der Satz von Fubini für skalare Funktionen	151
Der Satz von Fubini für vektorwertige Funktionen	154
Die Minkowskische Ungleichung für Integrale	159
Eine Charakterisierung von $L_p(\mathbb{R}^{m+n}, E)$	164
Ein Spursatz	165
7 Die Faltung	169
Die Definition der Faltung	169
Translationsgruppen	172
Elementare Eigenschaften der Faltung	175
Approximative Einheiten	177
Testfunktionen	179
Glatte Zerlegungen der Eins	181
Faltungen E -wertiger Funktionen	184
Distributionen	184
Lineare Differentialoperatoren	188
Schwache Ableitungen	192
8 Der Transformationssatz	198
Inverse Bilder des Lebesgueschen Maßes	198
Der allgemeine Transformationssatz	202
Ebene Polarkoordinaten	204
n -dimensionale Polarkoordinaten	205
Integration rotationssymmetrischer Funktionen	209
Der Transformationssatz für vektorwertige Funktionen	210
9 Die Fouriertransformation	213
Definition und elementare Eigenschaften	213
Der Raum der schnell fallenden Funktionen	215
Die Faltungsalgebra \mathcal{S}	218
Rechenregeln	219
Der Fouriersche Integralsatz	223
Faltungen und Fouriertransformationen	225
Fouriermultiplikationsoperatoren	228
Der Satz von Plancherel	231

Symmetrische Operatoren	233
Die Heisenbergsche Unschärferelation	234

Kapitel XI Mannigfaltigkeiten und Differentialformen

1 Unter mannigfaltigkeiten	243
Definitionen und elementare Eigenschaften	243
Submersionen	250
Berandete Unter mannigfaltigkeiten	255
Lokale Karten	258
Tangenten und Normalen	260
Der Satz vom regulären Wert	261
Eindimensionale Mannigfaltigkeiten	265
Zerlegungen der Eins	265
2 Multilineare Algebra	269
Äußere Produkte	269
Rücktransformationen	276
Das Volumenelement	278
Der Rieszsche Isomorphismus	280
Der Hodgesche Sternoperator	282
Indefinite innere Produkte	286
Tensoren	290
3 Die lokale Theorie der Differentialformen	294
Definitionen und Basisdarstellungen	294
Rücktransformationen	298
Die äußere Ableitung	302
Das Lemma von Poincaré	305
Tensoren	309
4 Vektorfelder und Differentialformen	314
Vektorfelder	314
Lokale Basisdarstellungen	317
Differentialformen	318
Lokale Darstellungen	321
Koordinatentransformationen	327
Die äußere Ableitung	329
Geschlossene und exakte Formen	332
Kontraktionen	332
Orientierbarkeit	335
Tensorfelder	341

5 Riemannsche Metriken	344
Das Volumenelement	344
Riemannsche Mannigfaltigkeiten	349
Der Sternoperator	360
Die Koableitung	362
6 Vektoranalysis	370
Der Rieszsche Isomorphismus	370
Der Gradient	373
Die Divergenz	375
Der Laplace-Beltrami Operator	379
Die Rotation	384
Die Lie-Ableitung	387
Der Hodge-Laplace Operator	392
Das Vektorprodukt und die Rotation	394

Kapitel XII Integration auf Mannigfaltigkeiten

1 Volumenmaße	403
Die Lebesguesche σ -Algebra von M	403
Die Definition des Volumenmaßes	404
Eigenschaften	409
Integrierbarkeit	410
Berechnung einiger Volumina	413
2 Integration von Differentialformen	419
Integrale von m -Formen	419
Restriktionen auf Untermannigfaltigkeiten	421
Der Transformationssatz	426
Der Satz von Fubini	427
Berechnung einiger Integrale	431
Flüsse von Vektorfeldern	434
Das Transporttheorem	438
3 Der Satz von Stokes	442
Der Stokessche Satz für glatte Mannigfaltigkeiten	442
Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten	444
Der Stokessche Satz mit Singularitäten	448
Ebene Gebiete	452
Höherdimensionale Probleme	454
Homotopieinvarianz und Anwendungen	455
Der Gaußsche Integralsatz	459
Die Greenschen Formeln	460
Der klassische Stokessche Satz	462
Der Sternoperator und die Koableitung	464

Literaturverzeichnis	469
Index	471