

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Kapitel IX Elemente der Maßtheorie	
1 Meßbare Räume	3
σ -Algebren	3
Die Borelsche σ -Algebra	5
Das zweite Abzählbarkeitsaxiom	6
Erzeugung der Borelschen σ -Algebra durch Intervalle	8
Basen topologischer Räume	10
Die Produkttopologie	11
Produkte Borelscher σ -Algebren	12
Die Meßbarkeit von Schnitten	14
2 Maße	17
Mengenfunktionen	17
Maßräume	18
Eigenschaften von Maßen	18
Nullmengen	20
3 Äußere Maße	24
Die Konstruktion äußerer Maße	24
Das Lebesguesche äußere Maß	25
Lebesgue-Stieltjessche äußere Maße	28
Hausdorffsche äußere Maße	29
4 Meßbare Mengen	32
Motivation	32
Die σ -Algebra der μ^* -meßbaren Mengen	33
Lebesguesche und Hausdorffsche Maße	35
Metrische Maße	36
5 Das Lebesguesche Maß	41
Der Lebesguesche Maßraum	41
Die Regularität des Lebesgueschen Maßes	42

Eine Charakterisierung Lebesgue meßbarer Mengen	45
Bilder Lebesgue meßbarer Mengen	46
Die Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes	48
Eine Charakterisierung des Lebesgueschen Maßes	49
Die Bewegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes	51
Der spezielle Transformationssatz	53
Nicht Lebesgue meßbare Mengen	55

Kapitel X Integrationstheorie

1 Meßbare Funktionen	64
Einfache und meßbare Funktionen	64
Ein Meßbarkeitskriterium	66
Meßbare numerische Funktionen	69
Der Verband der meßbaren numerischen Funktionen	71
Punktweise Grenzwerte meßbarer Funktionen	75
Radonmaße	76
2 Integrierbare Funktionen	83
Das Integral für einfache Funktionen	83
Die \mathcal{L}_1 -Seminorm	85
Das Bochner-Lebesguesche Integral	87
Die Vollständigkeit von \mathcal{L}_1	90
Elementare Eigenschaften des Integrals	91
Konvergenz in \mathcal{L}_1	95
3 Konvergenzsätze	100
Integration nichtnegativer numerischer Funktionen	100
Der Satz über die monotone Konvergenz	103
Das Lemma von Fatou	104
Integration numerischer Funktionen	107
Der Satz von Lebesgue	107
Parameterintegrale	110
4 Die Lebesgueschen Räume	114
Wesentlich beschränkte Funktionen	114
Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung	115
Die Vollständigkeit der Lebesgueschen Räume	118
L_p -Räume	121
Stetige Funktionen mit kompaktem Träger	123
Einbettungen	125
Stetige Linearformen auf L_p	127

5	Das n-dimensionale Bochner-Lebesguesche Integral	133
	Lebesguesche Maßräume	133
	Das Lebesguesche Integral für absolut integrierbare Funktionen	135
	Eine Charakterisierung Riemann integrierbarer Funktionen	138
6	Der Satz von Fubini	143
	Fast-überall definierte Abbildungen	143
	Das Cavalierische Prinzip	144
	Anwendungen des Cavalierischen Prinzips	147
	Der Satz von Tonelli	150
	Der Satz von Fubini für skalare Funktionen	151
	Der Satz von Fubini für vektorwertige Funktionen	154
	Die Minkowskische Ungleichung für Integrale	159
	Eine Charakterisierung von $L_p(\mathbb{R}^{m+n}, E)$	164
	Ein Spursatz	165
7	Die Faltung	169
	Die Definition der Faltung	169
	Translationsgruppen	172
	Elementare Eigenschaften der Faltung	175
	Approximative Einheiten	177
	Testfunktionen	179
	Glatte Zerlegungen der Eins	181
	Faltungen E -wertiger Funktionen	184
	Distributionen	184
	Lineare Differentialoperatoren	188
	Schwache Ableitungen	192
8	Der Transformationssatz	198
	Inverse Bilder des Lebesgueschen Maßes	198
	Der allgemeine Transformationssatz	202
	Ebene Polarkoordinaten	204
	n -dimensionale Polarkoordinaten	205
	Integration rotationssymmetrischer Funktionen	209
	Der Transformationssatz für vektorwertige Funktionen	210
9	Die Fouriertransformation	213
	Definition und elementare Eigenschaften	213
	Der Raum der schnell fallenden Funktionen	215
	Die Faltungsalgebra \mathcal{S}	218
	Rechenregeln	219
	Der Fouriersche Integralsatz	223
	Faltungen und Fouriertransformationen	225
	Fouriermultiplikationsoperatoren	228
	Der Satz von Plancherel	231

Symmetrische Operatoren	233
Die Heisenbergsche Unschärferelation	234

Kapitel XI Mannigfaltigkeiten und Differentialformen

1 Untermannigfaltigkeiten	243
Definitionen und elementare Eigenschaften	243
Submersionen	250
Berandete Untermannigfaltigkeiten	255
Lokale Karten	258
Tangenten und Normalen	260
Der Satz vom regulären Wert	261
Eindimensionale Mannigfaltigkeiten	265
Zerlegungen der Eins	265
2 Multilineare Algebra	269
Äußere Produkte	269
Rücktransformationen	276
Das Volumenelement	278
Der Rieszsche Isomorphismus	280
Der Hodgesche Sternoperator	282
Indefinite innere Produkte	286
Tensoren	290
3 Die lokale Theorie der Differentialformen	294
Definitionen und Basisdarstellungen	294
Rücktransformationen	298
Die äußere Ableitung	302
Das Lemma von Poincaré	305
Tensoren	309
4 Vektorfelder und Differentialformen	314
Vektorfelder	314
Lokale Basisdarstellungen	317
Differentialformen	318
Lokale Darstellungen	321
Koordinatentransformationen	327
Die äußere Ableitung	329
Geschlossene und exakte Formen	332
Kontraktionen	332
Orientierbarkeit	335
Tensorfelder	341

5	Riemannsche Metriken	344
	Das Volumenelement	344
	Riemannsche Mannigfaltigkeiten	349
	Der Sternoperator	360
	Die Koableitung	362
6	Vektoranalysis	370
	Der Rieszsche Isomorphismus	370
	Der Gradient	373
	Die Divergenz	375
	Der Laplace-Beltrami Operator	379
	Die Rotation	384
	Die Lie-Ableitung	387
	Der Hodge-Laplace Operator	392
	Das Vektorprodukt und die Rotation	394

Kapitel XII Integration auf Mannigfaltigkeiten

1	Volumenmaße	403
	Die Lebesguesche σ -Algebra von M	403
	Die Definition des Volumenmaßes	404
	Eigenschaften	409
	Integrierbarkeit	410
	Berechnung einiger Volumina	413
2	Integration von Differentialformen	419
	Integrale von m -Formen	419
	Restriktionen auf Untermannigfaltigkeiten	421
	Der Transformationssatz	426
	Der Satz von Fubini	427
	Berechnung einiger Integrale	431
	Flüsse von Vektorfeldern	434
	Das Transporttheorem	438
3	Der Satz von Stokes	442
	Der Stokessche Satz für glatte Mannigfaltigkeiten	442
	Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten	444
	Der Stokessche Satz mit Singularitäten	448
	Ebene Gebiete	452
	Höherdimensionale Probleme	454
	Homotopieinvarianz und Anwendungen	455
	Der Gaußsche Integralsatz	459
	Die Greenschen Formeln	460
	Der klassische Stokessche Satz	462
	Der Sternoperator und die Koableitung	464

Literaturverzeichnis	469
Index	471