

Burg /Haf /Wille

Höhere Mathematik für Ingenieure

Band I Analysis

Von Prof. Dr. rer. nat. Friedrich Wille
Universität Kassel, Gesamthochschule

3., durchgesehene Auflage
Mit 230 Figuren, zahlreichen Beispielen
und 217 Übungen, zum Teil mit Lösungen



B. G. Teubner Stuttgart 1992

Inhalt

1 Grundlagen

1.1	Reelle Zahlen	.1
1.1.1	Die Zahlengerade	.1
1.1.2	Rechnen mit reellen Zahlen	.5
1.1.3	Ordnung der reellen Zahlen und ihre Vollständigkeit	.10
1.1.4	Mengenschreibweise	.14
1.1.5	Vollständige Induktion	.20
1.1.6	Potenzen, Wurzeln, Absolutbetrag	.25
1.1.7	Summenformeln: geometrische, binomische, polynomische	.28
1.2	Elementare Kombinatorik	.35
1.2.1	Fragestellungen der Kombinatorik	.35
1.2.2	Permutationen	.36
1.2.3	Permutationen mit Identifikationen	.37
1.2.4	Variationen ohne Wiederholungen	.40
1.2.5	Variationen mit Wiederholungen	.42
1.2.6	Kombinationen ohne Wiederholungen	.43
1.2.7	Kombinationen mit Wiederholungen	.44
1.2.8	Zusammenfassung	.46
1.3	Funktionen	.48
1.3.1	Beispiele	.48
1.3.2	Reelle Funktionen einer reellen Variablen	.50
1.3.3	Tabellen, graphische Darstellungen, Monotonie	.52
1.3.4	Umkehrfunktion, Verkettungen	.57
1.3.5	Allgemeiner Abbildungsbegriff	.61
1.4	Unendliche Folgen reeller Zahlen	.62
1.4.1	Definition und Beispiele	.63
1.4.2	Nullfolgen	.64
1.4.3	Konvergente Folgen	.67
1.4.4	Ermittlung von Grenzwerten	.69
1.4.5	Häufungspunkte, beschränkte Folgen	.73
1.4.6	Konvergenzkriterien	.76
1.4.7	Lösen von Gleichungen durch Iteration	.79
1.5	Unendliche Reihen reeller Zahlen	.83
1.5.1	Konvergenz unendlicher Reihen	.83
1.5.2	Allgemeine Konvergenzkriterien	.88
1.5.3	Absolut konvergente Reihen	.91
1.5.4	Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen	.94

1.6	Stetige Funktionen	98
1.6.1	Problemstellung: Lösen von Gleichungen	98
1.6.2	Stetigkeit	99
1.6.3	Zwischenwertsatz	103
1.6.4	Regeln für stetige Funktionen	106
1.6.5	Maximum und Minimum stetiger Funktionen	109
1.6.6	Gleichmäßige Stetigkeit	112
1.6.7	Grenzwerte von Funktionen	115
1.6.8	Pole und Grenzwerte im Unendlichen	119
1.6.9	Einseitige Grenzwerte, Unstetigkeiten	122

Elementare Funktionen

2.1	Polynome	125
2.1.1	Allgemeines	125
2.1.2	Geraden	126
2.1.3	Quadratische Polynome, Parabeln	131
2.1.4	Quadratische Gleichungen	136
2.1.5	Berechnung von Polynomwerten, Horner-Schema	139
2.1.6	Division von Polynomen, Anzahl der Nullstellen	143
2.2	Rationale und algebraische Funktionen	145
2.2.1	Gebrochene rationale Funktionen	145
2.2.2	Algebraische Funktionen	150
2.2.3	Kegelschnitte	154
2.3	Trigonometrische Funktionen	158
2.3.1	Bogenlänge am Einheitskreis	158
2.3.2	Sinus und Cosinus	165
2.3.3	Tangens und Cotangens	170
2.3.4	Arcus-Funktionen	173
2.3.5	Anwendungen: Entfernungsbestimmung, Schwingungen	175
2.4	Exponentialfunktionen, Logarithmus, Hyperbelfunktionen	181
2.4.1	Allgemeine Exponentialfunktionen	181
2.4.2	Wachstumsvorgänge. Die Zahl e	184
2.4.3	Die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ und der natürliche Logarithmus	188
2.4.4	Logarithmen zu beliebigen Basen	191
2.4.5	Hyperbel- und Areafunktionen	194
2.5	Komplexe Zahlen	196
2.5.1	Einführung	196
2.5.2	Der Körper der komplexen Zahlen	198
2.5.3	Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus im Komplexen	204
2.5.4	Polarkoordinaten, geometrische Deutung der komplexen Multiplikation, Zeigerdiagramm	207
2.5.5	Fundamentalsatz der Algebra, Folgen und Reihen, stetige Funktionen im Komplexen	210

3 Differentialrechnung einer reellen Variablen

3.1 Grundlagen der Differentialrechnung	212
3.1.1 Geschwindigkeit	212
3.1.2 Differenzierbarkeit, Tangenten	215
3.1.3 Differenzierbare Funktionen	220
3.1.4 Differentiationsregeln für Summen, Produkte und Quotienten reeller Funktionen	225
3.1.5 Kettenregel, Regel für Umkehrfunktionen, implizites Differenzieren	229
3.1.6 Mittelwertsatz der Differentialrechnung	235
3.1.7 Ableitungen der trigonometrischen Funktionen und der Arcusfunktionen	238
3.1.8 Ableitungen der Exponential- und Logarithmus-Funktionen	242
3.1.9 Ableitungen der Hyperbel- und Area-Funktionen	246
3.1.10 Zusammenstellung der wichtigsten Differentiationsregeln	247
3.2 Ausbau der Differentialrechnung	249
3.2.1 Die Regeln von de l'Hospital	249
3.2.2 Die Taylorsche Formel	253
3.2.3 Beispiele zur Taylorformel	257
3.2.4 Zusammenstellung der Taylorreihen elementarer Funktionen	264
3.2.5 Berechnung von n	267
3.2.6 Konvexität, geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung	269
3.2.7 Das Newtonsche Verfahren	274
3.2.8 Bestimmung von Extremstellen	281
3.2.9 Kurvendiskussion	286
3.3 Anwendungen	294
3.3.1 Bewegung von Massenpunkten	294
3.3.2 Fehlerabschätzung	298
3.3.3 Zur binomischen Reihe: physikalische Näherungsformeln	299
3.3.4 Zur Exponentialfunktion: Wachsen und Abklingen	300
3.3.5 Zum Newtonschen Verfahren	304
3.3.6 Extremalprobleme	305

4 Integralrechnung einer reellen Variablen

4.1 Grundlagen der Integralrechnung	311
4.1.1 Flächeninhalt und Integral	311
4.1.2 Integrierbarkeit stetiger und monotoner Funktionen	315
4.1.3 Graphisches Integrieren, Riemannsche Summen, numerische Integration mit der Tangentenformel	317
4.1.4 Regeln für Integrale	322
4.1.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	326

4.2	Berechnung von Integralen	329
4.2.1	Unbestimmte Integrale, Grundintegrale	329
4.2.2	Substitutionsmethode	331
4.2.3	Produktintegration	341
4.2.4	Integration rationaler Funktionen	348
4.2.5	Integration weiterer Funktionenklassen	354
4.2.6	Numerische Integration	357
4.3	Uneigentliche Integrale	362
4.3.1	Definition und Beispiele	362
4.3.2	Rechenregeln und Konvergenzkriterien	365
4.3.3	Integralkriterium für Reihen	373
4.3.4	Die Integralfunktionen Ei, Li, si, ci, das Fehlerintegral und die Gammafunktion	375
4.4	Anwendung: Wechselstromrechnung	379
4.4.1	Mittelwerte in der Wechselstromtechnik	379
4.4.2	Komplexe Funktionen einer reellen Variablen	382
4.4.3	Komplexe Wechselstromrechnung	385
4.4.4	Ortskurven bei Wechselstromschaltungen	391

5 Folgen und Reihen von Funktionen

5.1	Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen	397
5.1.1	Gleichmäßige und punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen	397
5.1.2	Vertauschung von Grenzprozessen	402
5.1.3	Gleichmäßig konvergente Reihen	405
5.2	Potenzreihen	409
5.2.1	Konvergenzradius	409
5.2.2	Addieren und Multiplizieren von Potenzreihen sowie Differenzieren und Integrieren	412
5.2.3	Identitätssatz, Abelscher Grenzwertsatz	414
5.2.4	Bemerkung zur Polynomapproximation	417
5.3	Fourier-Reihen	418
5.3.1	Periodische Funktionen	419
5.3.2	Trigonometrische Reihen, Fourier-Koeffizienten	420
5.3.3	Beispiele für Fourier-Reihen	422
5.3.4	Konvergenz von Fourier-Reihen	430
5.3.5	Komplexe Schreibweise von Fourier-Reihen	436
5.3.6	Anwendung: Gedämpfte erzwungene Schwingung	439

6 Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler

6.1	Der n-dimensionale Raum \mathbb{R}^n.	444
6.1.1	Spaltenvektoren.	445
6.1.2	Arithmetik im \mathbb{R}^n .	446
6.1.3	Folgen und Reihen von Vektoren.	452
6.1.4	Topologische Begriffe.	455
6.1.5	Matrizen.	458
6.2	Abbildungen im \mathbb{R}^n.	462
6.2.1	Abbildungen aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m .	462
6.2.2	Funktionen zweier reeller Variabler.	464
6.2.3	Stetigkeit im \mathbb{R}^n .	469
6.3	Differenzierbare Abbildungen von mehreren Variablen.	472
6.3.1	Partielle Ableitungen.	472
6.3.2	Ableitungsmatrix, Differenzierbarkeit, Tangentialebene	477
6.3.3	Regeln für differenzierbare Abbildungen. Richtungsableitung	483
6.3.4	Das vollständige Differential.	487
6.3.5	Höhere partielle Ableitungen	493
6.3.6	Taylorformel und Mittelwertsatz.	495
6.4	Gleichungssysteme, Extremalprobleme, Anwendungen.	498
6.4.1	Newton-Verfahren im \mathbb{R}^n .	498
6.4.2	Satz über implizite Funktionen, Invertierungssatz.	504
6.4.3	Extremalprobleme ohne Nebenbedingungen.	509
6.4.4	Extremalprobleme mit Nebenbedingungen.	513

7 Integralrechnung mehrerer reeller Variabler

7.1	Integration bei zwei Variablen.	521
7.1.1	Anschauliche Einführung des Integrals zweier reeller Variabler	521
7.1.2	Analytische Einführung des Integrals zweier reeller Variabler	532
7.1.3	Grundlegende Sätze.	537
7.1.4	Riemannsche Summen.	543
7.1.5	Anwendungen.	545
7.1.6	Krummlinige Koordinaten, Transformationen, Funktionaldeterminanten.	552
7.1.7	Transformationsformel für Bereichsintegrale.	558
7.2	Allgemeinfall: Integration bei mehreren Variablen.	564
7.2.1	Riemannsches Integral im \mathbb{R}^n .	564
7.2.2	Grundlegende Sätze.	567
7.2.3	Krummlinige Koordinaten, Funktionaldeterminante, Transformationsformel.	569

7.2.4	Rauminhalte.	576
7.2.5	Rotationskörper.	579
7.2.6	Anwendungen: Schwerpunkte, Trägheitsmomente.	583
7.3	Parameterabhängige Integrale.	591
7.3.1	Stetigkeit und Integrierbarkeit parameterabhängiger Integrale	591
7.3.2	Differentiation eines parameterunabhängigen Integrals	592
7.3.3	Differentiation bei variablen Integrationsgrenzen.	594
	Lösungen zu den Übungen	596
	Symbole	602
	Literatur	604
	Sachverzeichnis	607