

---

# Inhaltsverzeichnis

---

## 1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1.1 Der Mannigfaltigkeitsbegriff .....	1
1.2 Differenzierbare Abbildungen .....	4
1.3 Der Rang .....	5
1.4 Untermannigfaltigkeiten .....	7
1.5 Beispiele von Mannigfaltigkeiten .....	9
1.6 Summen, Produkte und Quotienten von Mannigfaltigkeiten .....	12
1.7 Genügen uns Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume? .....	17
1.8 Test .....	18
1.9 Übungsaufgaben .....	22
1.10 Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	23

## 2. Der Tangentialraum

2.1 Tangentialräume im euklidischen Raum ...	26
2.2 Drei Fassungen des Tangentialraumbegriffs .....	28
2.3 Äquivalenz der drei Fassungen .....	33
2.4 Definition des Tangentialraums .....	37
2.5 Das Differential .....	38
2.6 Die Tangentialräume eines Vektorraums ...	42
2.7 Geschwindigkeitsvektoren von Kurven ...	43
2.8 Ein weiterer Blick auf den Ricci-Kalkül ...	44
2.9 Test .....	47
2.10 Übungsaufgaben .....	49
2.11 Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	50

### 3. Differentialformen

3.1 Alternierende $k$ -Formen .....	52
3.2 Die Komponenten einer alternierenden $k$ -Form .....	54
3.3 Alternierende $n$ -Formen und die Determinante .....	56
3.4 Differentialformen .....	58
3.5 Einsformen .....	60
3.6 Test .....	62
3.7 Übungsaufgaben .....	64
3.8 Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	65

### 4. Der Orientierungsbegriff

4.1 Einführung .....	68
4.2 Die beiden Orientierungen eines $n$ -dimensionalen reellen Vektorraums .....	70
4.3 Orientierte Mannigfaltigkeiten .....	73
4.4 Konstruktion von Orientierungen .....	75
4.5 Test .....	77
4.6 Übungsaufgaben .....	79
4.7 Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	80

### 5. Integration auf Mannigfaltigkeiten

5.1 Welches sind die richtigen Integranden? ...	82
5.2 Die Anschauung vom Integrationsvorgang .....	86
5.3 Lebesgue-Vorkenntnisse-Paket .....	88
5.4 Definition der Integration auf Mannigfaltigkeiten .....	92
5.5 Einige Eigenschaften des Integrals .....	96
5.6 Test .....	99
5.7 Übungsaufgaben .....	102
5.8 Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	102

## 6. Berandete Mannigfaltigkeiten

6.1	Vorbemerkung .....	104
6.2	Differenzierbarkeit im Halbraum .....	105
6.3	Das Randverhalten der Diffeomorphismen .....	106
6.4	Der Begriff der berandeten Mannigfaltigkeit .....	108
6.5	Untermannigfaltigkeiten .....	109
6.6	Konstruktion berandeter Mannigfaltigkeiten .....	111
6.7	Tangentialräume am Rande .....	112
6.8	Die Orientierungskonvention .....	113
6.9	Test .....	114
6.10	Übungsaufgaben .....	118
6.11	Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	118

## 7. Die anschauliche Bedeutung des Satzes von Stokes

7.1	Vergleich der Antworten auf Maschen und Spalte .....	120
7.2	Die Strömungsbilanz einer $(n - 1)$ -Form auf einer $n$ -Masche .....	121
7.3	Quellstärke und Cartansche Ableitung ...	124
7.4	Der Satz von Stokes .....	125
7.5	Der de Rham-Komplex .....	126
7.6	Simpliziale Komplexe .....	127
7.7	Das de Rham-Theorem .....	131

## 8. Das Dachprodukt und die Definition der Cartanschen Ableitung

8.1	Das Dachprodukt alternierender Formen .....	135
8.2	Eine Charakterisierung des Dachprodukts .....	137
8.3	Der definierende Satz für die Cartansche Ableitung .....	139
8.4	Beweis für ein Kartengebiet .....	141
8.5	Beweis für die ganze Mannigfaltigkeit ....	142

8.6 Die Natürlichkeit der Cartanschen Ableitung .....	145
8.7 Der de Rham-Komplex .....	146
8.8 Test .....	147
8.9 Übungsaufgaben .....	150
8.10 Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	150

## 9. Der Satz von Stokes

9.1 Der Satz .....	152
9.2 Beweis für den Halbraum .....	153
9.3 Beweis für ein Kartengebiet .....	155
9.4 Allgemeiner Fall .....	156
9.5 Zerlegungen der Eins .....	157
9.6 Integration mittels Zerlegungen der Eins .....	160
9.7 Test .....	161
9.8 Übungsaufgaben .....	164
9.9 Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	165

## 10. Klassische Vektoranalysis

10.1 Einführung .....	167
10.2 Die Übersetzungsisomorphismen .....	168
10.3 Gradient, Rotation und Divergenz .....	171
10.4 Linien- und Flächenelemente .....	173
10.5 Die klassischen Integralsätze .....	175
10.6 Die Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen .....	179
10.7 Das Flächenelement in den Koordinaten der Fläche .....	181
10.8 Das Flächenelement des Graphen einer Funktion von zwei Variablen .....	185
10.9 Der Integralbegriff der klassischen Vektoranalysis .....	186
10.10 Test .....	189
10.11 Übungsaufgaben .....	191
10.12 Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	192

**11. Die de Rham-Cohomologie**

11.1	Definition des de Rham-Funktors .....	194
11.2	Einige Eigenschaften .....	196
11.3	Homotopieinvarianz: Aufsuchen der Beweisidee .....	198
11.4	Durchführung des Beweises .....	201
11.5	Das Poincaré-Lemma .....	203
11.6	Der Satz vom stetig gekämmten Igel .....	206
11.7	Test .....	208
11.8	Übungsaufgaben .....	211
11.9	Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	211

**12. Differentialformen  
auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten**

12.1	Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten ...	213
12.2	Skalarprodukt alternierender $k$ -Formen ..	216
12.3	Der Sternoperator .....	219
12.4	Die Coableitung .....	223
12.5	Harmonische Formen und Hodge-Theorem .....	226
12.6	Die Poincaré-Dualität .....	229
12.7	Test .....	231
12.8	Übungsaufgaben .....	233
12.9	Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	235

**13. Rechnen in Koordinaten**

13.1	Sternoperator und Coableitung im dreidimensionalen euklidischen Raum ....	237
13.2	Formen und duale Formen auf Mannigfaltigkeiten ohne Metrik .....	239
13.3	Drei Grundsätze des Ricci-Kalküls auf Mannigfaltigkeiten ohne Metrik .....	240
13.4	Tensorfelder .....	243
13.5	Hinauf- und Herunterziehen der Indices im Ricci-Kalkül .....	247
13.6	Invariante Bedeutung des Stellungwechsels der Indices .....	249

13.7	Skalarprodukte für Tensoren im Ricci-Kalkül .....	251
13.8	Dachprodukt und Sternoperator im Ricci-Kalkül .....	252
13.9	Divergenz und Laplace-Operator im Ricci-Kalkül .....	254
13.10	Ein Schlußwort .....	257
13.11	Test .....	258
13.12	Übungsaufgaben .....	261
13.13	Hinweise zu den Übungsaufgaben .....	264

#### **14. Anhang: Testantworten, Literatur, Register**

14.1	Antworten auf die Testfragen .....	266
14.2	Literaturverzeichnis .....	268
14.3	Register .....	269