

Gert Roepstorff

# **Pfadintegrale in der Quantenphysik**

2., durchgesehene Auflage



# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Die Brownsche Bewegung</b>                    | <b>1</b>  |
| 1.1      | Die eindimensionale Zufallsbewegung              | 1         |
| 1.2      | Die d-dimensionale Irrfahrt                      | 6         |
| 1.3      | Erzeugende Funktionen                            | 9         |
| 1.4      | Der Kontinuumslices                              | 12        |
| 1.5      | Imaginäre Zeit                                   | 13        |
| 1.6      | Der Wiener-Prozeß                                | 17        |
| 1.6.1    | Die Analysis zufälliger Pfade                    | 17        |
| 1.6.2    | Mehrdimensionale Gaußsche Integrale              | 20        |
| 1.6.3    | Unabhängige Zuwächse                             | 21        |
| 1.7      | Erwartungswerte                                  | 22        |
| 1.8      | Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß                    | 25        |
| <b>2</b> | <b>Die Feynman-Kac-Formel</b>                    | <b>31</b> |
| 2.1      | Das bedingte Wiener-Maß                          | 31        |
| 2.2      | Approximation durch äquidistante Zeiten          | 35        |
| 2.3      | Die Trotter-Produktformel                        | 37        |
| 2.4      | Die Brownsche Röhre                              | 41        |
| 2.5      | Die Golden-Thompson-Symanzik-Schranke            | 44        |
| 2.6      | Der mit einem Energie-Operator verknüpfte Prozeß | 47        |
| 2.7      | Der thermodynamische Formalismus                 | 52        |
| 2.8      | Von den Spinsystemen zur Mehlerschen Formel      | 55        |
| 2.9      | Das Reflexionsprinzip                            | 58        |
| <b>3</b> | <b>Die Brownsche Brücke</b>                      | <b>61</b> |
| 3.1      | Die kanonische Zerlegung eines Pfades            | 61        |
| 3.2      | Schranken für die Übergangsamplitude             | 65        |
| 3.3      | Variationsprinzipien                             | 70        |
| <b>4</b> | <b>Die Fourier-Zerlegung</b>                     | <b>75</b> |
| 4.1      | Die Fourier-Koeffizienten                        | 75        |
| 4.2      | Korrekturen zur semiklassischen Näherung         | 77        |
| 4.3      | Gekoppelte Systeme                               | 81        |
| 4.4      | Der getriebene harmonische Oszillator            | 84        |
| 4.5      | Oszillierende elektrische Felder                 | 87        |

|          |                                                            |            |
|----------|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>Lineare Kopplung von Bosonen</b>                        | <b>91</b>  |
| 5.1      | Pfadintegrale für Bosonen . . . . .                        | 91         |
| 5.2      | Schranken für die freie Energie . . . . .                  | 95         |
| 5.3      | Das Polaron-Problem . . . . .                              | 97         |
| 5.4      | Die Feldtheorie des Polaron-Modells . . . . .              | 105        |
| <b>6</b> | <b>Magnetische Felder</b>                                  | <b>109</b> |
| 6.1      | Heuristische Betrachtungen . . . . .                       | 109        |
| 6.2      | Itô-Integrale . . . . .                                    | 111        |
| 6.3      | Die semiklassische Näherung . . . . .                      | 115        |
| 6.4      | Das konstante Magnetfeld . . . . .                         | 116        |
| 6.5      | Landauscher Diamagnetismus . . . . .                       | 119        |
| 6.6      | Magnetische Flußlinien . . . . .                           | 121        |
| <b>7</b> | <b>Euklidische Feldtheorie</b>                             | <b>127</b> |
| 7.1      | Was ist ein euklidisches Feld? . . . . .                   | 127        |
| 7.2      | Die euklidische Zweipunktfunktion . . . . .                | 129        |
| 7.3      | Das freie euklidische Skalarfeld . . . . .                 | 133        |
| 7.3.1    | Die $n$ -Punktfunktionen . . . . .                         | 133        |
| 7.3.2    | Die stochastische Interpretation . . . . .                 | 135        |
| 7.4      | Gaußsche Funktionalintegrale . . . . .                     | 137        |
| 7.5      | Grundforderungen an eine euklidische Feldtheorie . . . . . | 141        |
| <b>8</b> | <b>Feldtheorie auf dem Gitter</b>                          | <b>149</b> |
| 8.1      | Die Gitterversion des Skalarfeldes . . . . .               | 149        |
| 8.2      | Der euklidische Propagator auf dem Gitter . . . . .        | 151        |
| 8.2.1    | Darstellung durch Fourier-Zerlegung . . . . .              | 151        |
| 8.2.2    | Darstellung durch Zufallswege auf dem Gitter . . . . .     | 156        |
| 8.3      | Das Variationsprinzip . . . . .                            | 158        |
| 8.3.1    | Modelle mit diskretem Phasenraum . . . . .                 | 158        |
| 8.3.2    | Modelle mit kontinuierlichem Phasenraum . . . . .          | 161        |
| 8.4      | Die effektive Wirkung . . . . .                            | 166        |
| 8.5      | Das effektive Potential . . . . .                          | 171        |
| 8.6      | Die Ginsburg-Landau-Gleichungen . . . . .                  | 174        |
| 8.7      | Die Molekularfeldnäherung . . . . .                        | 177        |
| 8.8      | Gaußsche Approximation . . . . .                           | 182        |
| <b>9</b> | <b>Quantisierung der Eichtheorien</b>                      | <b>185</b> |
| 9.1      | Die euklidische Version der Maxwell-Theorie . . . . .      | 185        |
| 9.1.1    | Die klassische Situation ( $\hbar = 0$ ) . . . . .         | 185        |
| 9.1.2    | Die allgemeine Situation ( $\hbar > 0$ ) . . . . .         | 190        |
| 9.2      | Nicht-abelsche Eichtheorien . . . . .                      | 191        |
| 9.2.1    | Einige Vorbetrachtungen . . . . .                          | 192        |
| 9.2.2    | Die Faddeev-Popov-Theorie . . . . .                        | 194        |
| 9.3      | Eichtheorien auf dem Gitter . . . . .                      | 200        |

|                                                             |            |
|-------------------------------------------------------------|------------|
| 9.4 Die Kunst der Schleifen (Wilson Loops) . . . . .        | 204        |
| 9.5 Das $SU(n)$ -Higgs-Modell . . . . .                     | 209        |
| <b>10 Fermionen</b>                                         | <b>213</b> |
| 10.1 Das Dirac-Feld auf dem Minkowski-Raum . . . . .        | 213        |
| 10.2 Das euklidische Dirac-Feld . . . . .                   | 215        |
| 10.3 Grassmann-Algebren . . . . .                           | 219        |
| 10.4 Formale Ableitungen . . . . .                          | 223        |
| 10.5 Formale Integration . . . . .                          | 225        |
| 10.5.1 Integrale über $A(E)$ . . . . .                      | 225        |
| 10.5.2 Integrale über $A(E \oplus F)$ . . . . .             | 227        |
| 10.5.3 Integrale vom Exponentialtyp . . . . .               | 228        |
| 10.5.4 Die Fourier-Laplace-Transformation . . . . .         | 229        |
| 10.6 Funktionalintegrale der QED . . . . .                  | 231        |
| 10.7 Die $SU(n)$ -Gittereichtheorie mit Fermionen . . . . . | 233        |
| <b>Anhang A: Symbolverzeichnis und Glossar</b>              | <b>237</b> |
| <b>Anhang B: Häufig benutzte Gauß-Prozesse</b>              | <b>245</b> |
| <b>Anhang C: Die Ungleichung von Jensen</b>                 | <b>249</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                        | <b>251</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis</b>                                 | <b>261</b> |