

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Rechnen

§1.	Zahlen und ihre Darstellung	1
	1.1 Zahldarstellung zu beliebiger Basis 2 * 1.2 Realisierung von Zahldarstellungen auf Rechenhilfsmitteln 6 *	
	1.3 Rechnen im Dualsystem 8 *	
	1.4 Festkomma-Arithmetik 11 *	
	1.5 Gleitkomma-Arithmetik 11 *	
	1.6 Aufgaben 12	
§2.	Operationen mit Gleitkommazahlen	13
	2.1 Die Rundungsvorschrift 14 *	
	2.2 Verknüpfung von Gleitkommazahlen 16 *	
	2.3 Numerisch stabile bzw. instabile Auswertung von Formeln 18 *	
	2.4 Aufgaben 20	
§3.	Fehleranalysen	20
	3.1 Die Kondition eines Problems 21 *	
	3.2 Abschätzung der Rundungsfehler durch Vorwärtsanalyse 24 *	
	3.3 Die Rückwärtsanalyse des Rundungsfehlers 28 *	
	3.4 Intervallarithmetik 29 *	
	3.5 Aufgaben 30	
§4.	Algorithmen	32
	4.1 Der euklidische Algorithmus 32 *	
	4.2 Bewertung von Algorithmen 36 *	
	4.3 Komplexität von Algorithmen 39 *	
	4.4 Berechnung der Komplexität einiger Algorithmen 43 *	
	4.5 Ein Konzept zur Verbesserung der Komplexitätsordnung 45 *	
	4.6 Schnelle Matrixmultiplikation 48 *	
	4.7 Aufgaben 49	

Kapitel 2. Lineare Gleichungssysteme

§1.	Das Eliminationsverfahren nach Gauß	51
	1.1 Notation und Aufgabenstellung 52 *	
	1.2 Der Rechenprozeß 52 *	
	1.3 Das Gaußsche Verfahren als Dreieckszerlegung 54 *	
	1.4 Einige spezielle Matrizen 60 *	
	1.5 Bemerkungen zur Pivotsuche 62 *	
	1.6 Komplexität des Gaußschen Algorithmus 63 *	
	1.7 Aufgaben 65	
§2.	Die Cholesky-Zerlegung	66
	2.1 Erinnerung an Bekanntes über positiv definite ($n \times n$)-Matrizen 66	
	* 2.2 Der Satz von der Cholesky-Zerlegung 66 *	
	2.3 Komplexität der Cholesky-Zerlegung 68 *	
	2.4 Aufgaben 68	

X Inhaltsverzeichnis

§3.	Die QR-Zerlegung nach Householder	69
	3.1 Householder-Matrizen 69 * 3.2 Die Grundaufgabe 70 * 3.3 Der Algorithmus nach Householder 71 * 3.4 Komplexität der QR-Zerlegung 72 * 3.5 Aufgaben 72	
§4.	Vektornormen und Normen von Matrizen	73
	4.1 Normen auf Vektorräumen 73 * 4.2 Die natürliche Norm einer Matrix 74 * 4.3 Spezielle Normen von Matrizen 75 * 4.4 Aufgaben 78	
§5.	Fehlerabschätzungen	78
	5.1 Kondition einer Matrix 78 * 5.2 Eine Fehlerabschätzung bei gestörter Matrix 80 * 5.3 Brauchbare Lösungen 81 * 5.4 Aufgaben 83	
§6.	Schlechtkonditionierte Probleme	84
	6.1 Die Singulärwertzerlegung einer Matrix 85 * 6.2 Pseudonormallösungen linearer Gleichungssysteme 88 * 6.3 Die Pseudoinverse einer Matrix 90 * 6.4 Zurück zu linearen Gleichungssystemen 93 * 6.5 Verbesserung der Kondition und Regularisierung eines linearen Gleichungssystems 94 * 6.6 Aufgaben 97	

Kapitel 3. Eigenwerte

§1.	Reduktion auf Tridiagonal- bzw. Hessenberg-Gestalt	99
	1.1 Das Householder-Verfahren 100 * 1.2 Berechnung der Eigenwerte von Tridiagonalmatrizen 102 * 1.3 Berechnung der Eigenwerte von Hessenberg-Matrizen 104 * 1.4 Aufgaben 106	
§2.	Die Jacobi-Rotation; Eigenwertabschätzungen	106
	2.1 Das Jacobi-Verfahren 106 * 2.2 Abschätzungen der Eigenwerte 110 * 2.3 Aufgaben 113	
§3.	Die Potenzmethode	113
	3.1 Ein iterativer Ansatz 114 * 3.2 Berechnung der Eigenvektoren und weiterer Eigenwerte 116 * 3.3 Der Rayleigh-Quotient 116 * 3.4 Aufgaben 117	
§4.	Der QR-Algorithmus	118
	4.1 Konvergenz des QR-Algorithmus 119 * 4.2 Bemerkungen zum LR-Algorithmus 122 * 4.3 Aufgaben 125	

Kapitel 4. Approximation

§1.	Vorbereitungen	126
	1.1 Normierte Vektorräume 126 * 1.2 Banachräume 127 * 1.3 Hilberträume und Prae-Hilberträume 128 * 1.4 Die Räume $L^p[a, b]$ 130 * 1.5 Lineare Operatoren 131 * 1.6 Aufgaben 133	
§2.	Die Approximationssätze von Weierstraß	134
	2.1 Approximation durch Polynome 134 * 2.2 Der Approximationssatz für stetige Funktionen 135 * 2.3 Der Gedankenkreis von Korovkin 137 * 2.4 Anwendungen des Satzes 2.3. 140 * 2.5 Approximationsgüte 142 * 2.6 Aufgaben 144	

§3.	Das allgemeine Approximationsproblem	145
	3.1 Beste Näherungen 145 * 3.2 Existenz eines Proximums 146 * 3.3 Eindeutigkeit des Proximums 147 * 3.4 Lineare Approximation 148 *	
	3.5 Eindeutigkeit in endlichdimensionalen linearen Unterräumen 149 *	
	3.6 Aufgaben 153	
§4.	Gleichmäßige Approximation	153
	4.1 Approximation durch Polynome 154 * 4.2 Haarsche Räume 155 *	
	4.3 Der Alternantensatz 156 * 4.4 Eindeutigkeit 158 * 4.5 Eine Abschätzung 158 * 4.6 Berechnung des Proximums 159 * 4.7 Tschebyschev-Polynome 1. Art 163 * 4.8 Entwicklung nach Tschebyschev-Polynomen 164 * 4.9 Konvergenz der Proxima 167 * 4.10 Zur nichtlinearen Approximation 167 * 4.11 Bemerkungen zur Approximationsaufgabe in $(C[a, b], \ \cdot\ _1)$ 168 * 4.12 Aufgaben 169	
§5.	Approximation in Prae-Hilberträumen	170
	5.1 Charakterisierung des Proximums 171 * 5.2 Die Normalgleichungen 171 * 5.3 Orthonormalsysteme 172 * 5.4 Die Legendreschen Polynome 174 * 5.5 Eigenschaften orthonormierter Polynome 176 * 5.6 Konvergenz in $C[a, b]$ 177 * 5.7 Approximation stückweise stetiger Funktionen 178 * 5.8 Trigonometrische Approximation 179 * 5.9 Aufgaben 182	
§6.	Die Methode der kleinsten Quadrate	183
	6.1 Diskrete Approximation 184 * 6.2 Die Lösung der Normalgleichungen 185 * 6.3 Ausgleichung durch Polynome 186 * 6.4 Zusammenfallende Stützstellen 188 * 6.5 Diskrete Approximation durch trigonometrische Funktionen 190 * 6.6 Aufgaben 193	

Kapitel 5. Interpolation

§1.	Das Interpolationsproblem	194
	1.1 Interpolation in Haarschen Räumen 194 * 1.2 Interpolation durch Polynome 195 * 1.3 Das Restglied 196 * 1.4 Abschätzungen 197 * 1.5 Aufgaben 199	
§2.	Interpolationsmethoden und Restglied	200
	2.1 Ansatz von Lagrange 200 * 2.2 Ansatz von Newton 201 * 2.3 Steigungen 201 * 2.4 Die allgemeine Peanosche Restglieddarstellung 204 *	
	2.5 Eine ableitungsfreie Fehlerabschätzung 210 * 2.6 Verbindung zur Analysis 210 * 2.7 Aufgaben 212	
§3.	Gleichabständige Stützstellen	213
	3.1 Das Differenzenschema 214 * 3.2 Darstellungen des Interpolationspolynoms 214 * 3.3 Numerische Differentiation 216 * 3.4 Aufgaben 220	
§4.	Konvergenz von Interpolationspolynomen	221
	4.1 Beste Interpolation 221 * 4.2 Konvergenzprobleme 222 * 4.3 Konvergenzaussagen 223 * 4.4 Aufgaben 226	
§5.	Spezielle Interpolationen	227
	5.1 Das Hornerschema 227 * 5.2 Der Algorithmus von Aitken-Neville 228 * 5.3 Hermite-Interpolation 230 * 5.4 Trigonometrische Interpolation 232 * 5.5 Interpolation im Komplexen 235 * 5.6 Aufgaben 236	

XII Inhaltsverzeichnis

§6.	Mehrdimensionale Interpolation	237
	6.1 Verschiedene Interpolationsaufgaben 237 * 6.2 Interpolation auf Rechtecken 239 * 6.3 Abschätzung des Interpolationsfehlers 240 * 6.4 Aufgaben 242	

Kapitel 6. Splines

§1.	Polynom-Splines	244
	1.1 Splineräume 245 * 1.2 Basis eines Splinerraums 246 * 1.3 Proxima in Splineräumen 246 * 1.4 Aufgaben 248	
§2.	Interpolierende Splines	249
	2.1 Splines ungeraden Grades 249 * 2.2 Eine Extremaleigenschaft der Splines 252 * 2.3 Quadratische Splines 254 * 2.4 Konvergenzverhalten 256 * 2.5 Aufgaben 257	
§3.	B-Splines	258
	3.1 Existenz von B-Splines 258 * 3.2 Lokale Basen 259 * 3.3 Weitere Eigenschaften von B-Splines 261 * 3.4 Lineare B-Splines 263 * 3.5 Quadratische B-Splines 264 * 3.6 Kubische B-Splines 265 * 3.7 Aufgaben 265	
§4.	Berechnung interpolierender Splines	266
	4.1 Kubische Splines 266 * 4.2 Quadratische Splines 269 * 4.3 Ein allgemeines Interpolationsproblem 270 * 4.4 Aufgaben 272	
§5.	Abschätzungen und Approximation durch Splines	273
	5.1 Fehlerabschätzungen für lineare Splines 273 * 5.2 Zur gleichmäßigen Approximation durch lineare Splines 275 * 5.3 Ausgleichen durch lineare Splines 275 * 5.4 Fehlerabschätzungen für Splines höheren Grades 277 * 5.5 Ausgleichssplines höheren Grades 278 * 5.6 Aufgaben 281	
§6.	Mehrdimensionale Splines	283
	6.1 Bilineare Splines 283 * 6.2 Bikubische Splines 284 * 6.3 Blended Splines 285 * 6.4 Aufgaben 288	

Kapitel 7. Integration

§1.	Interpolationsquadratur	291
	1.1 Rechteckregeln 291 * 1.2 Die Sehnentrapzesregel 294 * 1.3 Die Euler-MacLaurinsche Entwicklung 297 * 1.4 Die Simpsonsche Regel 300 * 1.5 Newton-Cotes-Formeln 304 * 1.6 Unsymmetrische Quadraturformeln 305 * 1.7 Aufgaben 306	
§2.	Schrittweitenextrapolation	306
	2.1 Das Halbierungsverfahren 307 * 2.2 Fehlerbetrachtung 309 * 2.3 Extrapolation 310 * 2.4 Konvergenz 312 * 2.5 Aufgaben 315	

§3.	Numerische Integration nach Gauß	315
	3.1 Ansatz von Gauß 316 * 3.2 Gauß-Quadratur als Interpolationsquadratur 318 * 3.3 Fehlerdarstellung 319 * 3.4 Modifikationen 321 * 3.5 Uneigentliche Integrale 322 * 3.6 Stützstellen und Gewichte Gaußscher Quadraturformeln 324 * 3.7 Aufgaben 325	
§4.	Spezielle Quadraturen	326
	4.1 Integration über ein unendliches Intervall 326 * 4.2 Singulärer Integrand 328 * 4.3 Periodische Funktionen 330 * 4.4 Aufgaben 331	
§5.	Optimalität und Konvergenz	331
	5.1 Normminimierung 332 * 5.2 Minimaler Einfluß zufälliger Fehler 333 * 5.3 Optimale Quadraturformeln 334 * 5.4 Konvergenz von Quadraturformeln 337 * 5.5 Quadraturooperatoren 340 * 5.6 Aufgaben 341	
§6.	Mehrdimensionale Integration	342
	6.1 Kartesische Produkte 342 * 6.2 Integration über Standardgebiete 345 * 6.3 Die Monte-Carlo-Methode 347 * 6.4 Aufgaben 349	

Kapitel 8. Iteration

§1.	Das allgemeine Iterationsverfahren	352
	1.1 Anschauliche Deutung des Iterationsverfahrens 352 * 1.2 Konvergenz des Iterationsverfahrens 353 * 1.3 Lipschitzkonstanten 355 * 1.4 Fehlerabschätzung 356 * 1.5 Konvergenzverhalten und Konvergenzgüte 357 * 1.6 Aufgaben 358	
§2.	Das Newton-Verfahren	359
	2.1 Konvergenzbeschleunigung des Iterationsverfahrens 360 * 2.2 Geometrische Deutung 361 * 2.3 Mehrfache Nullstellen 362 * 2.4 Das Sekantenverfahren 363 * 2.5 Das Newton-Verfahren für $m > 1$ 365 * 2.6 Wurzeln algebraischer Gleichungen 366 * 2.7 Aufgaben 367	
§3.	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme	369
	3.1 Folgen von Iterationsmatrizen 369 * 3.2 Das Gesamtschrittverfahren 371 * 3.3 Das Einzelschrittverfahren 375 * 3.4 Der Satz von Stein und Rosenberg 378 * 3.5 Aufgaben 382	
§4.	Weitere Konvergenzuntersuchungen	383
	4.1 Relaxation beim Gesamtschrittverfahren 383 * 4.2 Relaxation beim Einzelschrittverfahren 385 * 4.3 Optimale Relaxationsparameter 388 * 4.4 Aufgaben 393	

Kapitel 9. Lineare Optimierung

§1.	Einführende Beispiele, allgemeine Problemstellung	395
	1.1 Eine optimale Produktionsplanung 395 * 1.2 Ein semiinfinites Optimierungsproblem 397 * 1.3 Ein lineares Steuerungsproblem 398 * 1.4 Die allgemeine Problemstellung 399 * 1.5 Aufgaben 400	

XIV Inhaltsverzeichnis

§2.	Polyeder	401
	2.1 Charakterisierung von Ecken 402 * 2.2 Existenz von Ecken 403 *	
	2.3 Das Hauptergebnis 405 * 2.4 Eine weitere Charakterisierung von Ecken 405 * 2.5 Aufgaben 407	
§3.	Das Simplexverfahren	407
	3.1 Vorbereitungen 408 * 3.2 Der Eckenaustausch ohne Entartung 410	
	* 3.3 Startecken 414 * 3.4 Bemerkungen zu entarteten Ecken 416 * 3.5	
	Die Zweiphasenmethode 416 * 3.6 Das revidierte Simplexverfahren 418	
	* 3.7 Aufgaben 419	
§4.	Betrachtungen zur Komplexität	420
	4.1 Die Beispiele von Klee und Minty 421 * 4.2 Zum Durchschnittsver- halten von Algorithmen 422 * 4.3 Laufzeitverhalten von Algorithmen	
	423 * 4.4 Polynomiale Algorithmen 424 * 4.5 Aufgaben 430	
	Literatur	431
	Bezeichnungen	439
	Namen- und Sachverzeichnis	441