

Inhaltsverzeichnis

Teil A. Lineare Algebra I

<i>Kapitel 1. Vektorräume</i>	1
§ 1. Der Begriff eines Vektorraumes	1
1. Vorbemerkung 2. Vektorräume 3. Unterräume 4. Geraden 5. Das Standardbeispiel K^n 6. Geometrische Deutung 7. Anfänge einer Geometrie im \mathbb{R}^2	
§ 2*. Über den Ursprung der Vektorräume.	10
1. Die GRASSMANNsche Ausdehnungslehre 2. GRASSMANN: Übersicht über die allgemeine Formenlehre 3. Extensive Größen als Elemente eines Vektorraumes 4. Reaktion der Mathematiker 5. Der moderne Vektorraumbegriff	
§ 3. Beispiele von Vektorräumen	15
1. Einleitung 2. Reelle Folgen 3. Vektorräume von Abbildungen 4. Stetige Funktionen 5. Reelle Polynome 6*. Reell-analytische Funktionen 7*. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung 8. Die Vektorräume $\text{Abb}[M, K]$	
§ 4. Elementare Theorie der Vektorräume	20
1. Vorbemerkung 2. Homogene Gleichungen 3. Erzeugung von Unterräumen 4. Lineare Abhängigkeit 5. Der Begriff einer Basis 6. Die Dimension eines Vektorraums 7. Der Dimensions-Satz 8*. Der Basis-Satz für beliebige Vektorräume 9*. Ein Glasperlen-Spiel	
§ 5. Anwendungen	30
1. Die reellen Zahlen als Vektorraum über \mathbb{Q} 2. Beispiele 3. Der Rang einer Teilmenge 4. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme	
§ 6. Homomorphismen von Vektorräumen	35
1. Einleitung 2. Definition und einfachste Eigenschaften 3. Kern und Bild 4. Die Dimensionsformel für Homomorphismen 5. Äquivalenz-Satz für Homomorphismen 6. Der Rang eines Homomorphismus 7. Anwendung auf homogene lineare Gleichungen 8. Beispiele 9*. Die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$	
§ 7*. Linearformen und der duale Raum	45
1. Vorbemerkungen 2. Definition und Beispiele 3. Existenz von Linearformen 4. Der Dual-Raum 5. Linearformen des Vektorraums der stetigen Funktionen	
§ 8*. Direkte Summen und Komplemente	48
1. Summe und direkte Summe 2. Komplemente 3. Die Dimensionsformel für Summen 4. Die Bild-Kern-Zerlegung	

Kapitel 2. Matrizen	52
§ 1. Erste Eigenschaften	52
1. Der Begriff einer Matrix 2. Über den Vorteil von Doppelindizes	
3. $\text{Mat}(m, n; K)$ als K -Vektorraum 4. Das Transponierte einer Matrix	
5. Spalten- und Zeilenrang 6. Elementare Umformungen 7. Die Ranggleichung	
8. Kästchenschreibweise und Rangberechnung 9. Zur Geschichte des Rang-Begriffes	
§ 2. Matrizenrechnung.	62
1. Arthur CAYLEY oder die Erfindung der Matrizenrechnung 2. Produkte von Matrizen	
3. Produkte von Vektoren 4. Homomorphismen zwischen Standard-Räumen	
5. Erntezeit 6. Das Skalarprodukt 7*. Rang $A \leq r$ 8. Kästchenrechnung	
§ 3. Algebren.	70
1. Einleitung 2. Der Begriff einer Algebra 3. Invertierbare Elemente 4. Ringe	
5. Beispiele	
§ 4. Der Begriff einer Gruppe.	73
1. Halbgruppen 2. Gruppen 3. Untergruppen 4. Kommutative Gruppen	
5. Homomorphismen 6. Normalteiler 7. Historische Bemerkungen	
§ 5. Matrix-Algebren	79
1. $\text{Mat}(n; K)$ und $GL(n; K)$ 2. Der Äquivalenz-Satz für invertierbare Matrizen	
3. Die Invarianz des Ranges 4. Spezielle invertierbare Matrizen 5*. Zentralisator und Zentrum	
6. Die Spur einer Matrix 7. Die Algebra $\text{Mat}(2; K)$	
§ 6. Der Normalformen-Satz	86
1. Elementar-Matrizen 2. Zusammenhang mit elementaren Umformungen	
3. Anwendungen 4*. Die WEYR-FROBENIUS-Ungleichungen 5. Aufgaben zum Normalformen-Satz	
6. Zur Geschichte des Normalformen-Satzes	
§ 7. Gleichungssysteme	89
1. Erinnerung an lineare Gleichungen 2. Wiederholung von Problemen und Ergebnissen	
3. Der Fall $m = n$ 4. Anwendung des Normalformen-Satzes	
5. Lösungsverfahren 6. Basiswechsel in Vektorräumen	
§ 8*. Pseudo-Inverse	94
1. Motivation 2. Der Begriff des Pseudo-Inversen 3. Ein Kriterium für Gleichungssysteme	
4. Zerlegung in eine direkte Summe	
Kapitel 3. Determinanten	98
§ 1. Erste Ergebnisse über Determinanten	98
1. Eine Motivation 2. Determinanten-Funktionen 3. Existenz 4. Eigenschaften	
5. Anwendungen auf die Gruppe $GL(n; K)$ 6. Die CRAMERSche Regel	
§ 2. Das Inverse einer Matrix.	106
1. Vorbemerkung 2. Die Entwicklungssätze 3. Die komplementäre Matrix	
4. Beschreibung des Inversen	
§ 3. Existenzbeweise	109
1. Durch Induktion 2. Permutationen 3. Die LEIBNIZsche Formel 4. Permutationsmatrizen	
5. Ein weiterer Existenzbeweis	
§ 4. Erste Anwendungen	112
1. Lineare Gleichungssysteme 2. Zweidimensionale Geometrie 3. Lineare Abhängigkeit	
4. Rangberechnung 5. Die Determinanten-Rekursionsformel	
6. Das charakteristische Polynom 7*. Mehrfache Nullstellen von Polynomen	
8*. Eine Funktionalgleichung 9. Orientierung von Vektorräumen	

§ 5.	Symmetrische Matrizen.	121
	1. Einleitung 2. Der Vektorraum der symmetrischen Matrizen 3. Quadratische Ergänzung 4. Die JACOBISCHE Normalform 5. Normalformen-Satz 6*. Trägheits-Satz	
§ 6.	Spezielle Matrizen	126
	1. Schiefsymmetrische Matrizen 2. Die VANDERMONDESche Determinante 3. Bandmatrizen 4. Aufgaben	
§ 7.	Zur Geschichte der Determinanten	128
	1. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ 2. BALTZER's Lehrbuch 3. Die weitere Entwicklung	

Teil B. Analytische Geometrie

<i>Kapitel 4. Elementar-Geometrie in der Ebene</i>	130
Der pythagoreische Lehrsatz	130
§ 1. Grundlagen	131
	1. Skalarprodukt, Abstand und Winkel 2. Die Abbildung $x \mapsto x^\perp$ 3. Geraden 4. Schnittpunkt zwischen zwei Geraden 5. Abstand zwischen Punkt und Gerade 6. Fläche eines Dreiecks 7. Der Höhenschnittpunkt
§ 2. Die Gruppe $O(2)$	137
	1. Drehungen und Spiegelungen 2. Orthogonale Matrizen 3. Bewegungen 4. Ein Beispiel 5. Die Hauptachsentransformation für 2×2 Matrizen 6. Fix-Geraden 7. Die beiden Orientierungen der Ebene
§ 3. Geometrische Sätze	141
	1. Der Kreis 2. Tangente 3. Die beiden Sehnensätze 4. Der Umkreis eines Dreiecks 5. Die EULER-Gerade 6. Der FEUERBACH-Kreis 7. Das Mittendreieck
<i>Kapitel 5. Euklidische Vektorräume</i>	148
§ 1. Positiv definite Bilinearformen.	149
	1. Symmetrische Bilinearformen 2. Beispiele 3. Positiv definite Bilinearformen 4. Positiv definite Matrizen 5. Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung 6. Normierte Vektorräume
§ 2. Das Skalarprodukt	155
	1. Der Begriff eines euklidischen Vektorraumes 2. Winkelmessung 3. Orthonormalbasen 4. Basisdarstellung 5. Orthogonales Komplement und orthogonale Summe 6. Linearformen
§ 3. Erste Anwendungen	162
	1. Positiv definite Matrizen 2. Die adjungierte Abbildung 3. Systeme linearer Gleichungen 4. Ein Kriterium für gleiche Orientierung 5*. LEGENDRE-Polynome
§ 4. Geometrie in euklidischen Vektorräumen.	165
	1. Geraden 2. Hyperebenen 3. Schnittpunkt von Gerade und Hyperebene 4. Abstand von einer Hyperebene 5*. Orthogonale Projektion 6*. Abstand zweier Unterräume 7*. Volumenberechnung 8*. Duale Basen
§ 5. Die orthogonale Gruppe	172
	1. Bewegungen 2. Spiegelungen 3. Die Transitivität von $O(V, \sigma)$ auf Sphären 4*. Die Erzeugung von $O(V, \sigma)$ durch Spiegelungen 5*. Winkeltreue Abbildungen
§ 6. Vermischte Aufgaben.	177

<i>Kapitel 6. Der \mathbb{R}^n als Euklidischer Vektorraum</i>	179
§ 1. Der \mathbb{R}^n und die orthogonale Gruppe $O(n)$	179
1. Der euklidische Vektorraum \mathbb{R}^n 2. Orthogonale Matrizen 3. Die Gruppe $O(n)$ 4. Spiegelungen 5. Erzeugung von $O(n)$ durch Spiegelungen 6*. Drehungen 7. Anwendung der Determinanten-Theorie 8*. Eine Parameterdarstellung 9. EULER, CAUCHY, JACOBI und CAYLEY	
§ 2. Die Hauptachsentransformation.	187
1. Problemstellung 2. Der Vektorraum der symmetrischen Matrizen 3. Positiv semi-definite Matrizen 4. Das Minimum einer quadratischen Form 5. Satz über die Hauptachsentransformation 6. Eigenwerte 7. Eigenräume	
§ 3. Anwendungen	195
1. Vorbemerkung 2. Positiv definite Matrizen 3. Hyperflächen 2. Grades 4*. Der Quadratwurzel-Satz 5*. Polar-Zerlegung 6*. Orthogonale Normalform 7*. Das MOORE-PENROSE-INVERSE	
§ 4*. Topologische Eigenschaften	201
1. Zusammenhang 2. Kompaktheit 3. Hauptachsentransformation	
<i>Kapitel 7. Geometrie im dreidimensionalen Raum</i>	204
§ 1. Das Vektorprodukt.	204
1. Definition und erste Eigenschaften 2. Zusammenhang mit Determinanten 3. Geometrische Deutung 4. Ebenen 5. Parallelotope 6. Vektorrechnung im Anschauungsraum	
§ 2*. Sphärische Geometrie	210
1. Über den Ursprung der Sphärik 2. Das sphärische Dreieck 3. Das Polardreieck 4. Entfernung auf der Erde	
§ 3. Die Gruppe $O(3)$	214
1. Beschreibung durch das Vektorprodukt 2. Erzeugung durch Drehungen 3. Spiegelungen 4. Fix-Geraden 5. Die Normalform 6. Die Drehachse 7*. Die EULERSche Formel 8*. Drehungen um eine Achse	
§ 4. Bewegungen	222
1. Fixpunkte 2. Bewegungen mit Fixpunkt 3. Schraubungen	
 Teil C. Lineare Algebra II	
<i>Kapitel 8. Polynome und Matrizen</i>	225
§ 1. Polynome	225
1. Der Vektorraum $\text{Pol } K$ 2. $\text{Pol } K$ als Ring 3. Zerfallende Polynome 4. $\text{Pol } K$ als Hauptidealring 5*. Unbestimmte	
§ 2. Die komplexen Zahlen	230
1. Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen 2. Konjugation und Betrag 3. Der Fundamentalsatz der Algebra	
§ 3. Struktursatz für zerfallende Matrizen	232
1. Der Begriff der Diagonalisierbarkeit 2. Das charakteristische Polynom 3. Äquivalenz-Satz für Eigenwerte 4. Nilpotente Matrizen 5. Idempotente Matrizen 6. Zerfallende Matrizen 7. Diagonalisierbarkeits-Kriterium 8*. Ein Beispiel zum Struktur-Satz 9*. Elementarsymmetrische Funktionen und Potenzsummen	

§ 4. Die Algebra $K[A]$	242
1. Eine Warnung 2. Matrix-Polynome 3. Das Minimalpolynom 4. Eigenwerte 5. Das Rechnen mit Kästchen-Diagonalmatrizen 6. Satz von CAYLEY 7. Äqui- valenz-Satz für Diagonalisierbarkeit 8. Spektralscharen 9. Eigenräume	
§ 5. Die JORDAN-CHEVALLEY-Zerlegung.	251
1. Existenz-Satz 2. Summen von diagonalisierbaren Matrizen 3. Die Ein- deutigkeit 4. Anwendungen	
§ 6. Normalformen reeller und komplexer Matrizen	254
1. Normalformen komplexer Matrizen 2. Reelle und komplexe Matrizen 3*. Hermitesche Matrizen 4. Invariante Unterräume 5. Die Stufenform 6. Der Satz über die Stufenform 7. Orthogonale Matrizen 8. Schiefsymmetrische Matrizen 9*. Normale Matrizen	
§ 7*. Der höhere Standpunkt	261
1. Einfache und halbeinfache Algebren 2. Kommutative Algebren 3. Die Struktursätze 4. Die weitere Entwicklung 5. Der generische Standpunkt	
<i>Kapitel 9. Homomorphismen von Vektorräumen.</i>	<i>264</i>
§ 1. Der Vektorraum $\text{Hom}(V, V')$	264
1. Der Vektorraum $\text{Abb}(M, V')$ 2. $\text{Hom}(V, V')$ als Unterraum von $\text{Abb}(V, V')$ 3. $\text{Mat}(m, n; K)$ als Beispiel 4. Verknüpfungen von $\text{Hom}(V, V')$ und $\text{Hom}(V', V'')$	
§ 2. Beschreibung der Homomorphismen im endlich-dimensionalen Fall .	266
1. Isomorphie mit Standard-Räumen 2. Darstellung der Homomorphismen 3. Basiswechsel 4. Die Algebra $\text{End } V$ 5. Diagonalisierbarkeit	
§ 3. Anwendungen	269
1. Spiegelungen in euklidischen Vektorräumen 2. Die Linksmultiplikation in $\text{Mat}(n; K)$ 3. Polynome	
§ 4. Der Quotientenraum	271
1. Einleitung 2. Nebenklassen 3. Der Satz über den Quotientenraum 4. Der Satz über den kanonischen Epimorphismus 5. Kanonische Faktorisierung 6. Anwendungen 7. Beispiele	
§ 5*. Nilpotente Endomorphismen	274
1. Problemstellung 2. Zyklische Unterräume 3. Der Struktur-Satz 4. Nilzykli- sche Matrizen 5. Die Normalform	
<i>Literatur</i>	<i>277</i>
<i>Namenverzeichnis</i>	<i>278</i>
<i>Sachverzeichnis</i>	<i>280</i>