

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Bezeichnungen	xi

Kapitel I Einführung

§ 1. Beispiele und Typeneinteilung	2
Beispiele 2 — Typeneinteilung 8 — Sachgemäß gestellte Probleme 9	
§ 2. Maximum-Prinzip	12
Beispiele 13 — Folgerungen 14	
§ 3. Differenzenverfahren	16
Diskretisierung 16 — Diskretes Maximum-Prinzip 19	
§ 4. Eine Konvergenztheorie für Differenzenverfahren	22
Konsistenz 22 — Lokaler und globaler Fehler 22 — Grenzen der Konvergenztheorie 25	

Kapitel II Konforme Finite Elemente

§ 1. Sobolev-Räume	28
Einführung der Sobolev-Räume 28 — Die Friedrichssche Ungleichung 30 — Singularitäten von H^1 -Funktionen 31 — Kompakte Einbettungen 32	
§ 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben 2. Ordnung	34
Variationsformulierung 34 — Reduktion auf homogene Randbedingungen 35 — Existenz von Lösungen 37 — Inhomogene Randbedingungen 41	
§ 3. Die Neumannsche Randwertaufgabe. Ein Spursatz	43
Elliptizität in H^1 43 — Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedingungen 44 — Neumannsche Randbedingungen 45 — Gemischte Randbedingungen 46 — Beweis des Spursatzes 46 — Praktische Konsequenzen aus dem Spursatz 49	
§ 4. Ritz-Galerkin-Verfahren und einfache Finite Elemente	52
Modellproblem 55	
§ 5. Einige gebräuchliche Finite Elemente	58
Forderungen an die Triangulierung 59 — Bedeutung der Differenzierbarkeitseigenschaften 60 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen	

62 — Bemerkung zu C^1 -Elementen 63 — Bilineare Elemente 65 — Quadratische Viereckelemente 67 — Affine Familien 67 — Zur Auswahl von Elementen 69	
§ 6. Approximationssätze	71
Der Fragenkreis um das Bramble-Hilbert-Lemma 72 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 73 — Bilineare Viereckelemente 77 — Inverse Abschätzungen 77 — Anhang: Zur Optimalität der Abschätzungen 78	
§ 7. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme zweiter Ordnung	82
Bemerkungen zu Regularitätssätzen 82 — Fehlerabschätzungen in der Energienorm 83 — L_2 -Abschätzungen 84 — Eine einfache L_∞ -Abschätzung 86	
§ 8. Rechentechnische Betrachtungen	88
Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix 88 — Innere Kondensation 90 — Aufwand für das Aufstellen der Matrix 91 — Rückwirkung auf die Wahl des Netzes 91 — Teilweise Netzverfeinerungen 91	

Kapitel III
Nichtkonforme und andere Methoden

§ 1. Abstrakte Hilfssätze und eine einfache Randapproximation	96
Die Lemmas von Strang 96 — Dualitätstechnik 98 — Das Crouzeix-Raviart-Element 99 — Eine einfache Approximation krummliniger Ränder 102 — Modifikationen beim Dualitätsargument 104	
§ 2. Isoparametrische Elemente	107
Isoparametrische Dreieckelemente 107 — Isoparametrische Viereckelemente 109	
§ 3. Weitere funktionalanalytische Hilfsmittel	112
Negative Normen 112 — Adjungierte Operatoren 114 — Ein abstrakter Existenzsatz 114 — Ein abstrakter Konvergenzsatz 116 — Beweis von Satz 3.4 117	
§ 4. Sattelpunktprobleme	119
Sattelpunkte und Minima 119 — Die inf-sup-Bedingung 120 — Gemischte Finite-Element-Methoden 124 — Die Laplacegleichung als gemischtes Problem 126 — Sattelpunktprobleme mit Strafterm 128	
§ 5. Die Stokesche Gleichung	134
Variationsformulierung 135 — Die inf-sup-Bedingung 136 — Bemerkungen zur Brezzi-Bedingung 137 — Fast inkompressible Strömungen 138	
§ 6. Finite Elemente für das Stokes Problem	139
Ein instabiles Element 139 — Das Taylor-Hood-Element 144 — Das Mini-Element 145 — Das divergenzfreie nichtkonforme P_1 -Element 145	

*Kapitel IV**Die Methode der konjugierten Gradienten*

§ 1. Klassische Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	149
Stationäre lineare Prozesse 149 — Gesamt- und Einzelschrittverfahren	
151 — Das Modellproblem 154 — Overrelaxation 154	
§ 2. Gradientenverfahren	158
Das allgemeine Gradientenverfahren 158 — Gradientenverfahren und	
quadratische Funktionen 159 — Konvergenzverhalten bei Matrizen mit	
großer Kondition 161	
§ 3. Verfahren mit konjugierten Gradienten und konjugierten Residuen ..	164
Der Algorithmus 166 — Analyse des cg-Verfahrens als optimales Ver-	
fahren 168 — Verfahren der konjugierten Residuen 170	
§ 4. Vorkonditionierung	173
Vorkonditionierung durch SSOR 176 — Vorkonditionierung durch ILU	
177 — Bemerkungen zur Parallelisierung 179 — Nichtlineare Probleme	
180	
§ 5. Sattelpunktprobleme	183
Der Uzawa-Algorithmus und seine Varianten 183 — Verbesserung der	
approximativen Inversen 185	

*Kapitel V**Mehrgitterverfahren*

§ 1. Mehrgitterverfahren für Variationsaufgaben	188
Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren 188 — Die Mehr-	
gitter-Idee 189 — Der Algorithmus 190 — Der Übergang zwischen den	
Gittern 194	
§ 2. Konvergenz von Mehrgitterverfahren	198
Diskrete Normen 199 — Verknüpfung mit den Sobolev-Normen 201 —	
Approximationseigenschaft 203 — Konvergenzbeweis für das Zweigit-	
terverfahren 204	
§ 3. Konvergenz bei mehreren Ebenen	207
Eine Rekursionsformel für den W-Zyklus 207 — Die Verschärfung für	
die Energienorm 208 — Der Konvergenzbeweis für den V-Zyklus 209	
§ 4. Berechnung von Startwerten	214
Bestimmung von Startwerten 214 — Komplexität 216 — Mehrgitter-	
verfahren mit wenigen Ebenen 217	
§ 5. Nichtlineare Probleme	219
Mehrgitter-Newton-Verfahren 220 — Das nichtlineare Mehrgitterverfah-	
ren 221 — Zur Konvergenz des Newton-Verfahrens 223 — Die Konti-	
nuitätsmethode 224 — Realisierung bei Mehrgitterverfahren 227	

*Kapitel VI**Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper*

§ 1. Einführung in die Elastizitätstheorie	230
Kinematik 230 — Gleichgewichtsbedingungen 232 — Die Piola-Transformation 233 — Materialgesetze 234 — Kleine Verzerrungen 238	
§ 2. Hyperelastische Materialien	240
§ 3. Lineare Elastizitätstheorie	243
Das Variationsproblem 243 — Die reine Verschiebungsmethode 247 — Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner 249 — Die gemischte Methode nach Hu-Washizu 251 — Fast inkompressibles Material 252 — Locking 253	
§ 4. Scheibe	257
Ebener Spannungszustand 257 — Ebener Verzerrungszustand 258 — Scheibenelemente 258 — Das PEERS-Element 259 — Zur Implementierung 263	
§ 5. Balken und Platten: Die Kirchhoff-Platte	264
Die Hypothesen 264 — Gemischte Methoden 267 — DKT-Elemente 269	
§ 6. Der Timoshenko-Balken	275
Der Verschiebungsansatz 275 — Reduzierte Integration 277 — Ein äquivalenter gemischter Ansatz 277	
§ 7. Die Mindlin-Reissner-Platte	281
Die Helmholtz-Zerlegung 282 — Der gemischte Ansatz mit Helmholtz-Zerlegung 283 — MITC-Elemente 285	
Literatur	292
Sachverzeichnis	299