

# Inhalt

## Teil I. Fraktale und Methoden zur Bestimmung fraktaler Dimension

1.	Einführung . . . . .	17
2.	Hausdorff-Maß und -Dimension . . . . .	24
2.1.	Hausdorff-Maß im $R^2$ . . . . .	24
2.2.	Fraktale Dimensionen . . . . .	27
2.3.	Lokale Hausdorff-Dimension und Dimensionsverteilung . . . . .	31
2.4.	Fraktale . . . . .	33
3.	Deterministische Fraktale . . . . .	35
3.1.	Allgemeine Eigenschaften von Fraktalen . . . . .	35
3.2.	Beispiele für deterministische Fraktale . . . . .	35
3.2.1	Kurven mit fraktaler Dimension . . . . .	35
3.2.2.	Selbstähnliche Mengen . . . . .	36
3.3.	Ein Programm zur Erzeugung von verallgemeinerten Koch-Schneeflocken . . . . .	40
4.	Zufällige Fraktale . . . . .	43
4.1.	Zufällige selbstähnliche Mengen . . . . .	43
4.2.	Mandelbrot-Zähle-Schnipsel . . . . .	46
4.3.	Zufällige Fraktale im Zusammenhang mit der Brownschen Bewegung . . . . .	48
4.4.	Selbstähnliche stochastische Prozesse . . . . .	50
5.	Verfahren zur Ermittlung fraktaler Dimensionen . . . . .	53
5.1.	Einführung . . . . .	53
5.2.	Zirkelmethode . . . . .	54
5.3.	Quadratzahlmethode . . . . .	55
5.4.	Wurstmethode . . . . .	58
5.5.	Schätzung der lokalen Dimension . . . . .	60
5.6.	Weitere Methoden . . . . .	61
5.7.	Dimensionsbestimmung für eine Graphit-Partikel . . . . .	62
	Literatur zu Teil I . . . . .	64

**Teil II. Gestaltsstatistik**

<b>1.</b>	<b>Grundbegriffe</b>	<b>71</b>
<b>2.</b>	<b>Beschreibung von Konturen</b>	<b>80</b>
2.1.	Einleitung	80
2.2.	Definition und Messung von Konturfunktionen	81
2.2.1.	Querschnittsfunktionen bei spiegelsymmetrischen Figuren	81
2.2.2.	Radiusvektorfunktionen	82
2.2.3.	Stützfunktionen	85
2.2.4.	Tangentenwinkelfunktionen	87
2.2.5.	Vergleich der drei Möglichkeiten der Beschreibung von Konturen durch Figuren	89
2.2.6.	Glättung von Konturen	89
2.3.	Invariante Parameter von Konturfunktionen für technische Partikeln	90
2.4.	Zwei Figurcnklassen: Superellipsen und Radialrhomben	93
2.4.1.	Superellipsen	93
2.4.2.	Radialrhomben	95
2.5.	Ermittlung approximierender Konturfunktionen	97
2.5.1.	Einleitung	97
2.5.2.	Approximation durch Ellipsen und Radialrhomben	98
2.5.3.	Fourier-Analyse	99
2.6.	Stochastische Modelle im Fall der Konturfunktionsbeschreibung	108
2.6.1.	Invariante Konturfunktionsparameter zufälliger Figuren	108
2.6.2.	Zufällige Radialrhomben	109
2.6.3.	Zufällig verrauschte Figuren	110
2.6.4.	Drei Störungsmodelle	111
2.7.	Statistik im Fall der Konturfunktionsbeschreibung	114
2.7.1.	Meßwerte der invarianten Parameter für Einzelfiguren	114
2.7.2.	Statistische Ermittlung von Verteilungskenngrößen der invarianten Parameter	115
2.7.3.	Statistik für zufällig verrauschte Figuren	115
2.7.4.	Statistik für zufällig Radialrhomben und verwandte Figuren	119
<b>3.</b>	<b>Mengentheoretische Gestaltsanalyse</b>	<b>121</b>
3.1.	Einleitung	121
3.2.	Einfache geometrische Formfaktoren	121
3.3.	Charakteristiken für zufällige kompakte Mengen	125
3.3.1.	Einleitung	125
3.3.2.	Zufällige kompakte Mengen	125
3.3.3.	Mittelwertformeln für kompakte konvexe Mengen	126
3.3.4.	Erwartungswerte zufälliger kompakter Mengen	127
3.3.5.	Varianzen zufälliger kompakter Mengen	132
3.3.6.	Mediane zufälliger kompakter Mengen	133
3.3.7.	Einige statistische Verfahren	134
3.4.	Vier Funktionen zur Beschreibung von Figuren	135
3.4.1.	Einleitung	135
3.4.2.	Sehnenlängenverteilungsfunktion	135
3.4.3.	Isotropisierte Mengenkovarianzfunktion	140
3.4.4.	Erosionsfunktionen	142

3.5.	Stochastische Modelle für zufällige kompakte Mengen . . . . .	144
3.5.1.	Poisson-Polygon . . . . .	144
3.5.2.	Dirichlet-Polygone . . . . .	147
3.5.3.	Abgerundete Polygone . . . . .	151
3.5.4.	Konvexe Hüllen zufälliger Figuren . . . . .	153
3.5.5.	Gaußsche zufällige Mengen . . . . .	156
3.5.6.	Inhomogene Boolesche Modelle . . . . .	157
3.5.7.	Vorob'evs Waldbrandmodell . . . . .	158
<b>4.</b>	<b>Punktbeschreibung</b> . . . . .	<b>159</b>
4.1.	Einleitung . . . . .	159
4.2.	Beschreibung von Landmarken-Konfigurationen und ihre Größe . . . . .	159
4.3.	Abstände und Transformationen von Landmarken-Konfigurationen . . . . .	161
4.3.1.	Problemstellung . . . . .	161
4.3.2.	Formeln für ausgewählte Klassen von Transformationen . . . . .	162
4.4.	Mittelwerte ebener Punktkonfigurationen . . . . .	166
4.4.1.	Eine Metrik für Punktkonfigurationen . . . . .	166
4.4.2.	Berechnung mittlerer Konfigurationen . . . . .	167
4.5.	Prokrustes-Analyse . . . . .	168
4.5.1.	Problemstellung . . . . .	168
4.5.2.	Auswertung der Ergebnisse der Prokrustes-Analyse . . . . .	169
4.6.	Formbeschreibung für Dreiecke und Punktetripel . . . . .	171
4.6.1.	Einleitung . . . . .	171
4.6.2.	Dreiecke . . . . .	172
4.6.3.	Punktetripel . . . . .	176
4.7.	Statistik für das Bookstein-Modell . . . . .	180
4.7.1.	Das Bookstein-Modell . . . . .	180
4.7.2.	Schätzung der Abstände und Varianzen . . . . .	180
4.7.3.	Formstatistik für das Bookstein-Modell . . . . .	182
<b>5.</b>	<b>Beispiele</b> . . . . .	<b>185</b>
5.1.	Die Gestalt von Sandkörnern . . . . .	185
5.2.	Die Gestalt von Händen . . . . .	196
	<b>Literatur zu Teil II</b> . . . . .	<b>204</b>

### Teil III. Punktfeldstatistik

<b>1.</b>	<b>Grundbegriffe</b> . . . . .	<b>217</b>
<b>2.</b>	<b>Endliche Punktfelder</b> . . . . .	<b>224</b>
2.1.	Vorbemerkungen . . . . .	224
2.2.	Punktfelder mit fester Punktzahl . . . . .	224
2.2.1.	Zwei stochastische Modelle . . . . .	224
2.2.2.	Zwei geologische Beispiele . . . . .	227
2.3.	Punktfelder mit zufälliger Punktzahl . . . . .	231
2.3.1.	Allgemeines . . . . .	231
2.3.2.	Einige Verteilungen für zufällige Anzahlen . . . . .	232

<b>3.</b>	<b>Poisson-Punktfelder</b>	237
3.1.	Vorbemerkungen	237
3.2.	Das homogene Poisson-Feld	238
3.2.1.	Grundlegende Eigenschaften	238
3.2.2.	Einige wichtige Formeln	239
3.2.3.	Größen 2. Ordnung	242
3.2.4.	Simulation eines homogenen Poisson-Feldes	244
3.2.5.	Statistik für das homogene Poisson-Feld	245
3.3.	Inhomogene Poisson-Felder	255
3.3.1.	Grundlegende Eigenschaften	255
3.3.2.	Wichtige Formeln	256
3.3.3.	Simulation eines inhomogenen Poisson-Feldes	257
3.3.4.	Statistik für inhomogene Poisson-Felder	257
<b>4.</b>	<b>Grundlagen der Theorie der Punktfelder</b>	267
4.1.	Einleitung	267
4.2.	Das Intensitätsmaß	267
4.3.	Leerwahrscheinlichkeiten	269
4.4.	Größen 2. Ordnung	270
4.4.1.	Definitionen und Formeln	270
4.4.2.	Interpretation von Paarkorrelationsfunktionen	276
4.5.	Größen 3. und höherer Ordnung	284
4.6.	Größen 2. Ordnung für markierte Punktfelder	288
4.7.	Nächste-Nachbar-Korrelation	292
4.8.	Abstände zu Nachbarn	293
4.9.	Palmsche Größen	294
4.10.	Anisotropie-Charakteristiken für markierte und unmarkierte Punktfelder	295
<b>5.</b>	<b>Statistik für homogene Punktfelder</b>	300
5.1.	Einleitung	300
5.2.	Bestimmung der Intensität und des Intensitätsmaßes	301
5.3.	Schätzung von Markenverteilungen und zugehörigen Größen	303
5.4.	Schätzung von Größen 2. Ordnung	304
5.4.1.	Schätzung von $\mathfrak{R}(B)$ , $K(r)$ und $L(r)$	304
5.4.2.	Schätzung der Paarkorrelationsfunktion	310
5.4.3.	Individuelle $L$ - und $g$ -Funktionen	315
5.4.4.	Schätzung von Markenkorrelationsfunktionen	316
5.4.5.	Orientierungsanalyse	318
5.5.	Schätzung von Größen 3. Ordnung	319
5.6.	Schätzungen von Nächste-Nachbar-Abstandsverteilungen	321
5.7.	Schätzung Palmscher Erwartungswerte	324
5.8.	Modelltests für Punktfelder	325
5.9.	Methoden zur Schätzung von Modellparametern	330
<b>6.</b>	<b>Punktfeldmodelle</b>	332
6.1.	Einleitung	332
6.2.	Clusterfelder: Neyman-Scott-Felder	334
6.2.1	Modellbeschreibung	334

Inhalt	13
6.2.2. Formeln für Neyman-Scott-Felder . . . . .	335
6.2.3. Statistische Verfahren für Matern-Clusterfelder . . . . .	339
6.3. Gibbs-Felder . . . . .	342
6.3.1. Modellbeschreibungen . . . . .	343
6.3.2. Simulation von Gibbs-Feldern . . . . .	349
6.3.3. Statistische Verfahren für Gibbs-Felder . . . . .	352
 Literatur zu Teil III . . . . .	 360
 Anhang A. Maße und Inhalte . . . . .	 365
 Anhang B. $\sup$ und $\inf$ , $\limsup$ und $\liminf$ . . . . .	 367
Anhang C. Grundbegriffe der Topologie . . . . .	369
Anhang D. Mengenoperationen . . . . .	370
Anhang E. Die Euklidische und die Hausdorff-Metrik . . . . .	373
Anhang F. Boolesche Modelle . . . . .	375
Anhang G. Die konvexe Hülle . . . . .	378
Anhang H. Zufällige Geraden und Geradenfelder . . . . .	379
Anhang I. Das Dirichlet-Mosaik und die Delaunay-Triangulation . . . . .	384
Anhang J. Keim-Korn-Modelle . . . . .	386
Anhang K. Die Fläche des Durchschnitts zweier einander schneidender Kreise	387
Anhang L. Kernschätzer für Dichtefunktionen . . . . .	388
 Symbolverzeichnis . . . . .	 390
Sachwortverzeichnis . . . . .	392