

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Natürliche Zahlen und vollständige Induktion .....</b>	<b>1</b>
1.1	Vollständige Induktion .....	1
1.2	Fakultät und Binomialkoeffizienten .....	2
1.3	Aufgaben .....	5
<b>2</b>	<b>Reelle Zahlen .....</b>	<b>7</b>
2.1	Die Körperstruktur von $\mathbb{R}$ .....	7
2.2	Die Anordnung von $\mathbb{R}$ .....	8
2.3	Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ .....	10
2.4	$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar .....	16
2.5	Aufgaben .....	18
<b>3</b>	<b>Komplexe Zahlen .....</b>	<b>20</b>
3.1	Der Körper der komplexen Zahlen .....	20
3.2	Die komplexe Zahlenebene .....	22
3.3	Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$ .....	24
3.4	Unmöglichkeit einer Anordnung von $\mathbb{C}$ .....	26
3.5	Aufgaben .....	26
<b>4</b>	<b>Funktionen .....</b>	<b>28</b>
4.1	Grundbegriffe .....	28
4.2	Polynome .....	32
4.3	Rationale Funktionen .....	35
4.4	Aufgaben .....	39
<b>5</b>	<b>Folgen .....</b>	<b>41</b>
5.1	Konvergenz von Folgen .....	41
5.2	Rechenregeln .....	43
5.3	Monotone Folgen .....	46
5.4	Eine Rekursionsfolge zur Berechnung von Quadratwurzeln .....	48
5.5	Der Satz von Bolzano-Weierstraß .....	50

5.6	Das Konvergenzkriterium von Bolzano-Cauchy.	
	Nochmals die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ .....	52
5.7	Die erweiterte Zahlengerade. Bestimmte Divergenz .....	54
5.8	Aufgaben .....	55
<b>6</b>	<b>Reihen</b> .....	<b>58</b>
6.1	Konvergenz von Reihen .....	58
6.2	Konvergenzkriterien .....	60
6.3	Der große Umordnungssatz. Rechnen mit Reihen .....	66
6.4	Potenzreihen .....	70
6.5	Aufgaben .....	76
<b>7</b>	<b>Stetige Funktionen. Grenzwerte</b> .....	<b>79</b>
7.1	Stetigkeit .....	79
7.2	Rechnen mit stetigen Funktionen .....	82
7.3	Erzeugung stetiger Funktionen durch normal konvergente Reihen .....	84
7.4	Der Zwischenwertsatz .....	87
7.5	Kompakte Mengen. Satz vom Maximum und Minimum .....	88
7.6	Anwendung: Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra .....	92
7.7	Gleichmäßige Stetigkeit .....	93
7.8	Stetige Fortsetzung. Grenzwerte von Funktionen .....	94
7.9	Einseitige Grenzwerte. Grenzwerte bei Unendlich. Uneigentliche Grenzwerte .....	98
7.10	Aufgaben .....	102
<b>8</b>	<b>Die Exponentialfunktion</b> .....	<b>105</b>
8.1	Definition der Exponentialfunktion .....	105
8.2	Die Exponentialfunktion für reelle Argumente .....	109
8.3	Der natürliche Logarithmus .....	112
8.4	Exponentialfunktionen zu allgemeinen Basen. Allgemeine Potenzen .....	114
8.5	Binomialreihen und Logarithmusreihe .....	116
8.6	Anwendung: das Wachstum von $n!$ .....	119
8.7	Hyperbolische Funktionen .....	121
8.8	Aufgaben .....	123
<b>9</b>	<b>Differentialrechnung</b> .....	<b>125</b>
9.1	Die Ableitung einer Funktion .....	125
9.2	Ableitungsregeln .....	129
9.3	Höhere Ableitungen .....	132

9.4	Mittelwertsatz und Schrankensatz .....	134
9.5	Beispiele und Anwendungen .....	137
9.6	Reihen differenzierbarer Funktionen .....	142
9.7	Konvexität .....	144
9.8	Konvexe Funktionen und Ungleichungen .....	148
9.9	Verallgemeinerung des Schrankensatzes .....	151
9.10	Eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion .....	153
9.11	Aufgaben .....	154
<b>10</b>	<b>Die Schwingungsgleichung. Trigonometrische Funktionen .....</b>	<b>157</b>
10.1	Die Schwingungsgleichung .....	157
10.2	Trigonometrische Funktionen .....	159
10.3	Die Umkehrfunktionen .....	163
10.4	Die Zahl $\pi$ .....	166
10.5	Polarkoordinaten .....	167
10.6	Aufgaben .....	168
<b>11</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten .....</b>	<b>170</b>
11.1	Einführende Feststellungen .....	170
11.2	Der Eindeutigkeitssatz .....	171
11.3	Ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung .....	172
11.4	Berechnung einer partikulären Lösung bei speziellen Inhomogenitäten .....	177
11.5	Anwendung auf Schwingungsprobleme .....	179
11.6	Stammfunktionen. Berechnung partikulärer Lösungen durch Variation der Konstanten .....	183
11.7	Aufgaben .....	186
<b>12</b>	<b>Integralrechnung .....</b>	<b>189</b>
12.1	Treppenfunktionen und ihre Integration .....	189
12.2	Regelfunktionen und ihre Integration über kompakte Intervalle .....	190
12.3	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....	197
12.4	Erste Anwendungen .....	202
12.5	Integration elementarer Funktionen .....	204
12.6	Integration normal konvergenter Reihen .....	210
12.7	Riemannsche Summen .....	211

12.8	Integration über nicht kompakte Intervalle. Uneigentliche Integrale .....	214
12.9	Die Eulersche Summenformel. Die Trapezregel .....	218
12.10	Aufgaben .....	222
<b>13</b>	<b>Geometrie differenzierbarer Kurven .....</b>	<b>227</b>
13.1	Parametrisierte Kurven .....	227
13.2	Die Bogenlänge .....	232
13.3	Parameterwechsel .....	236
13.4	Krümmung ebener Kurven .....	238
13.5	Die Sektorfläche .....	242
13.6	Windungszahlen .....	245
13.7	Kurven in Polarkoordinaten .....	249
13.8	Geometrie der Planetenbewegung. Die drei Keplerschen Gesetze .....	252
13.9	Aufgaben .....	255
<b>14</b>	<b>Elementar integrierbare Differentialgleichungen .....</b>	<b>259</b>
14.1	Wachstumsmodelle. Lineare und Bernoullische Gleichungen ..	259
14.2	Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen .....	263
14.3	Die Differentialgleichung $\ddot{x} = f(x)$ .....	267
14.4	Aufgaben .....	271
<b>15</b>	<b>Lokale Approximation von Funktionen.</b> <b>Taylorpolynome und Taylorreihen .....</b>	<b>272</b>
15.1	Approximation durch Taylorpolynome .....	272
15.2	Taylorreihen .....	276
15.3	Bernoulli-Zahlen. Die Cotangensreihe. Bernoulli-Polynome ..	280
15.4	Das Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung .....	283
15.5	Aufgaben .....	286
<b>16</b>	<b>Globale Approximation von Funktionen.</b> <b>Gleichmäßige Konvergenz .....</b>	<b>289</b>
16.1	Gleichmäßige Konvergenz .....	289
16.2	Eigenschaften der Grenzfunktion .....	292
16.3	Kriterien für gleichmäßige Konvergenz .....	294
16.4	Anwendung: die Eulerschen Formeln für $\zeta(2n)$ .....	298
16.5	Lokal-gleichmäßige Konvergenz .....	300
16.6	Der Weierstraßsche Approximationssatz .....	302
16.7	Aufgaben .....	304

<b>17 Approximation periodischer Funktionen.</b>	
Fourierreihen .....	306
17.1 Der Weierstraßsche Approximationssatz für periodische Funktionen .....	306
17.2 Definition der Fourierreihen. Der Identitätssatz .....	308
17.3 Anwendung: die Partialbruchreihe des Cotangens .....	312
17.4 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet .....	314
17.5 Die Besselsche Approximation periodischer Funktionen .....	319
17.6 Fourierreihen stückweise stetig differenzierbarer Funktionen ..	321
17.7 Konvergenz im quadratischen Mittel. Die Parsevalsche Gleichung .....	326
17.8 Anwendung: das isoperimetrische Problem .....	329
17.9 Wärmeleitung in einem Ring. Die Thetafunktion .....	330
17.10 Aufgaben .....	334
<b>18 Die Gammafunktion</b> .....	338
18.1 Die Gammafunktion nach Gauß .....	338
18.2 Charakterisierung der $\Gamma$ -Funktion nach Bohr-Mollerup. Die Eulersche Integraldarstellung .....	342
18.3 Die Stirlingsche Formel .....	345
18.4 Aufgaben .....	349
<b>Biographische Notiz zu Euler</b> .....	351
<b>Literaturhinweise</b> .....	352
<b>Bezeichnungen</b> .....	354
<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> .....	355