

Formalisieren und Beweisen

Logik für Informatiker

2., verbesserte Auflage



Inhalt

Einführung	1
Teil 1 Aussagenlogik	7
Kapitel 1A Formeln schreiben und benutzen	10
1A1 Aussagen, Verknüpfungen und Wahrheitsfunktionen	11
1A2 Aussagenlogische Formeln	12
1A3 Formalisieren	14
1A4 Induktives Definieren und Beweisen	15
1A5 Belegungen und Wahrheitswerte	15
1A6 Wahrheitswerte bestimmen	17
1A7 Syntax und Semantik	21
1A8 Die Wertfunktion	23
1A9 Formalisieren auf große und kleine Weise	24
Kapitel 1B Allgemeingültige Formeln und logisches Folgern	26
1B1 Logische Folgerung	26
1B2 Eigenschaften der logischen Folgerung	28
1B3 Beziehungen zu anderen Begriffen	29
1B4 Allgemeingültige Formeln und Beweisprinzipien	30
1B5 Der Ersetzungssatz	32
1B6 Widersprüchlichkeit und Unerfüllbarkeit	33
1B7 Logische Folgerung und Widersprüchlichkeit	35
1B8 Endlichkeits- und Kompaktheitssatz	35
Kapitel 1C Entscheidungsverfahren und Normalformen	40
1C1 Entscheidungsverfahren mit Wahrheitstafeln und ihr Aufwand	40
1C2 Konjunktive und disjunktive Normalformen	41
1C3 Entscheidungsverfahren mit Normalformen	43
1C4 Klauseln, Gentzen- und Hornformeln	44

Kapitel 1D	Ableiten	49
1D1	Ableiten an Beispielen	50
1D2	Ableitungsregeln, Ableiten, Ableitungen	52
1D3	Korrektheit	54
1D4	Die Schnittregel	55
1D5	Vollständigkeit	57
1D6	Wozu Vollständigkeitsbeweise?	58
1D7	Die Schnittregel ist vollständig fürs Widerlegen von Hornformeln	60
1D8	Die Schnittregel ist vollständig fürs Widerlegen von Gentzenformeln	63
1D9	Widerlegungen in Ableitungen umformen	68
1D10	Die Schnittregel ist fast vollständig	70
1D11	Die Schnittregel vervollständigen	71
1D12	Entscheiden durch Ableiten	74
Teil 2	Offene Prädikatenlogik	77
Kapitel 2A	Situationen strukturieren und durch Formeln beschreiben	81
2A1	Strukturieren und Struktur	81
2A2	Symbole, Signatur, Interpretation	84
2A3	Terme bilden	88
2A4	Formeln bilden	90
2A5	Variablenfreie Terme und Formeln auswerten	91
2A6	Einsetzen, Substitution	93
2A7	Gültige Formeln und Modelle	95
2A8	Auswerten mit Zuweisungen	96
2A9	Aussagenlogik in der Prädikatenlogik	97
Kapitel 2B	Mit Formeln und Strukturen umgehen	99
2B1	Erfüllbare Formeln und logische Folgerung	100
2B2	Erzeugte Strukturen	102
2B3	Herbrandstrukturen	103
2B4	Logik variablenfreier Formeln	109
2B5	Formeln mit Variablen aussagenlogisch interpretieren	110
2B6	Eigenschaften von Formeln mit Variablen	111
2B7	Normalformen	113
2B8	Umbenennen und Einsetzen	114
2B9	Axiome für Architekenstrukturen	115

Kapitel 2C	Strukturieren, Formalisieren, Axiomatisieren	120
2C1	Die Gleichheit axiomatisieren	121
2C2	Modelle der Gleichheitsaxiome	123
2C3	Prädikatenlogik mit Gleichheit	126
2C4	Axiome und Theorien	128
2C5	Das Architektenbeispiel axiomatisieren	131
Kapitel 2D	Ableiten	134
2D1	Ableitungsregeln in der offenen Prädikatenlogik	135
2D2	Schneiden und Einsetzen ist widerlegungsvollständig	136
2D3	Vollständigkeit fürs Widerlegen in die Prädikatenlogik hochheben	137
2D4	Vollständigkeit fürs Ableiten	138
2D5	Theorembeweiser	140
2D6	Endlichkeitssätze	142
2D7	Der Resolutionskalkül	143
2D8	Logisches Programmieren	146
Teil 3	Prädikatenlogik	149
Kapitel 3A	Quantorenformeln	152
3A1	Formeln mit Quantoren	152
3A2	Freie und gebundene Variablen	154
3A3	Einsetzen, Substitution	155
3A4	Auswerten	156
3A5	Erfüllbar, allgemeingültig, folgt logisch	158
3A6	Formeln aussagenlogisch interpretieren	161
3A7	Formeln abschließen oder öffnen	162
3A8	Weitere Eigenschaften von Quantorenformeln	162
Kapitel 3B	Finitisieren und mechanisieren	165
3B1	Pränexe Normalform	165
3B2	Skolemisieren	166
3B3	Theorembeweiser	169
3B4	Der Satz von Herbrand	171
3B5	Logisches Programmieren	175
3B6	Herbrandstrukturen	177
3B7	Der Satz von Löwenheim und Skolem	178
3B8	Endlichkeit- und Kompaktheitssatz	179

Kapitel 3C	Geometrie und Zahlen axiomatisieren	181
3C1	Mehr Axiome für die Euklidische Geometrie	182
3C2	Alle minimalen Geraden sind isomorph	184
3C3	Alle minimalen Ebenen sind isomorph	186
3C4	Vollständige Axiome, entscheidbare Theorien	187
3C5	Kategorische Axiome für die natürlichen Zahlen	188
3C6	Die natürlichen Zahlen sind nicht kategorisch axiomatisierbar	190
3C7	Das Induktionsschema	192
3C8	Die Peano-Axiome sind vollständig	193
3C9	Peano-Axiome mit Ordnung	194
3C10	Peano-Axiome für Ordnung und Addition	195
3C11	Peano-Axiome für Addition und Multiplikation	197
Kapitel 3D	Stärken und Schwächen	198
3D1	Termination von Programmen ist nicht entscheidbar	198
3D2	Berechnungen formalisieren	199
3D3	Die Wörtertheorie ist nicht entscheidbar	203
3D4	Berechnungen axiomatisieren	203
3D5	Die Prädikatenlogik ist unentscheidbar	206
3D6	Nicht beweisbare wahre Sätze	207
3D7	Wahrheit ist nicht formalisierbar	209
3D8	Die natürlichen Zahlen sind nicht axiomatisierbar	212
3D9	Die natürlichen Zahlen als Grundlage der Mathematik	214
3D10	Die Logik erweitern	217
3D11	Formalisieren	222
Anhang	Unvollständiger Dialog über Vollständigkeit	225
Die Lehrveranstaltung Logik für Informatiker		242
Verzeichnisse		245
Literaturverzeichnis		245
Personenverzeichnis		254
Begriffsverzeichnis		255
Symbolverzeichnis		259