

Inhaltsverzeichnis

1. Elementare Newtonsche Mechanik	1
1.0 Die Newtonschen Gesetze (1687) und ihre Interpretation	1
1.1 Gleichförmig geradlinige Bewegung und Inertialsysteme	4
1.2 Satz über Inertialsysteme	5
1.3 Impuls und Kraft	5
1.4 Typische Kräfte; Bemerkung über Maßeinheiten	7
1.5 Raum, Zeit und Kräfte	9
1.6 Das Zweiteilchensystem mit inneren Kräften	10
1.6.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung	10
1.6.2 Beispiel: Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Keplerproblem)	10
1.6.3 Schwerpunkts- und Relativimpuls im Zweiteilchensystem	15
1.7 Systeme von endlich vielen Teilchen	15
1.8 Der Schwerpunktsatz	16
1.9 Der Drehimpulssatz	17
1.10 Der Energiesatz	17
1.11 Das abgeschlossene n -Teilchensystem	18
1.12 Galileitransformationen	19
1.13 Bemerkungen über Raum und Zeit bei Galileiinvarianz	22
1.14 Konservative Kraftfelder	24
1.15 Eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes	26
1.16 Beispiele für Bewegungen in einer Dimension	27
1.16.1 Harmonischer Oszillator	27
1.16.2 Das ebene mathematische Pendel im Schwerefeld	28
1.17 Phasenraum für das n -Teilchensystem (im \mathbb{R}^3)	29
1.18 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen von (1.41)	30
1.19 Physikalische Konsequenzen von Satz aus Abschnitt 1.18	31
1.20 Lineare Systeme	33
1.21 Zur Integration eindimensionaler Bewegungsgleichungen	35
1.22 Beispiel: Ebenes Pendel mit beliebigem Ausschlag	36
1.23 Beispiel: Zweiteilchensystem mit Zentralkraft	38
1.24 Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte	41
1.25 Beispiele zu Abschnitt 1.24	43
1.26 Streuung zweier Teilchen, die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken: Kinematik	45
1.27 Zweiteilchenstreuung mit Zentralkraft: Dynamik	48
1.28 Beispiel: Coulombstreuung zweier Teilchen mit gleichen Massen und Ladungen	51

1.29 Ausgedehnte mechanische Körper	54
1.30 Virial und zeitliche Mittelwerte	57
Anhang: Praktische Übungen	59
2. Die Prinzipien der kanonischen Mechanik	63
2.1 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten	63
2.1.1 Definition von Zwangsbedingungen	63
2.1.2 Generalisierte Koordinaten	64
2.2 Das d'Alembertsche Prinzip	65
2.2.1 Definition der virtuellen Verrückungen	65
2.2.2 Statischer Fall	65
2.2.3 Dynamischer Fall	66
2.3 Die Lagrangeschen Gleichungen	67
2.4 Beispiele zu Abschnitt 2.3	68
2.5 Exkurs über Variationsprinzipien	70
2.6 Hamiltonsches Extremalprinzip	72
2.7 Die Euler-Lagrangegleichungen	73
2.8 Beispiele zu Abschnitt 2.7	74
2.9 Anmerkung über die Nicht-Eindeutigkeit der Lagrangefunktion	75
2.10 Eichtransformationen an der Lagrangefunktion	75
2.11 Zulässige Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten	76
2.12 Die Hamiltonfunktion und ihr Zusammenhang mit der Lagrangefunktion L	78
2.13 Legendretransformation für den Fall einer Variablen	79
2.14 Legendretransformation im Fall mehrerer Veränderlicher	80
2.15 Kanonische Systeme	82
2.16 Beispiele zu Abschnitt 2.15	82
2.17 Variationsprinzip auf die Hamiltonfunktion angewandt	84
2.18 Symmetrien und Erhaltungssätze	84
2.19 Satz von E. Noether	85
2.20 Infinitesimale Erzeugende für Drehung um eine Achse	86
2.21 Exkurs über die Drehgruppe	88
2.22 Infinitesimale Drehungen und ihre Erzeugenden	90
2.23 Kanonische Transformationen	91
2.24 Beispiele von kanonischen Transformationen	95
2.25 Die Struktur der kanonischen Gleichungen	96
2.26 Beispiel: Lineares, autonomes System in einer Dimension	97
2.27 Kanonische Transformationen in kompakter Notation	99
2.28 Zur symplektischen Struktur des Phasenraums	101
2.29 Der Liouvillesche Satz	103
2.29.1 Lokale Form	104
2.29.2 Integrale Form	105
2.30 Beispiele zum Liouvilleschen Satz	106
2.31 Die Poissonklammer	108
2.32 Eigenschaften der Poissonklammern	110
2.33 Infinitesimale kanonische Transformationen	112
2.34 Integrale der Bewegung	114
2.35 Hamilton-Jacobische Differentialgleichung	116
2.36 Beispiele zur Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung	117

2.37 Hamilton-Jacobigleichung und integrable Systeme	119
2.37.1 Lokale Glättung von Hamiltonschen Systemen	119
2.37.2 Integrbale Systeme	122
2.37.3 Winkel- und Wirkungsvariable	126
2.38 Störungen an quasiperiodischen Hamiltonschen Systemen	128
2.39 Autonome, nichtentartete Hamiltonsche Systeme in der Nähe von integrbalen Systemen	130
2.40 Beispiele, Mittelungsmethode	131
2.40.1 Anharmonischer Oszillatator	131
2.40.2 Mittelung von Störungen	133
Anhang: Praktische Übungen	135
3. Mechanik des starren Körpers	141
3.0 Definition des starren Körpers	141
3.1 Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers	143
3.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor	144
3.3 Eigenschaften des Trägheitstensors	145
3.4 Der Satz von Steiner	149
3.5 Beispiele zum Satz von Steiner	149
3.6 Drehimpuls des starren Körpers	152
3.7 Kräftefreie Bewegung von starren Körpern	153
3.8 Die Eulerschen Winkel	155
3.9 Definition der Eulerschen Winkel	156
3.10 Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers	157
3.11 Die Eulerschen Gleichungen	160
3.12 Anwendungsbeispiel: Der kräftefreie Kreisel	161
3.13 Kräftefreier Kreisel und geometrische Konstruktionen	164
3.14 Der Kreisel im Rahmen der kanonischen Mechanik	167
3.15 Beispiel: Symmetrischer Kinderkreisel im Schwerefeld	170
3.16 Anmerkung zum Kreiselproblem	172
Anhang: Praktische Übungen	172
4. Relativistische Mechanik	175
4.0 Schwierigkeiten der nichtrelativistischen Mechanik	176
4.1 Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	178
4.2 Die Lorentztransformationen	179
4.3 Analyse der Lorentz- und Poincarétransformationen	184
4.3.1 Drehungen und Spezielle Lorentztransformationen	186
4.3.2 Bedeutung der Speziellen Lorentztransformationen	189
4.4 Zerlegung von Lorentztransformationen in ihre Komponenten	190
4.4.1 Satz über orthochrone eigentliche Lorentztransformationen	190
4.4.2 Korollar zum Satz 4.4.1 und einige Konsequenzen	192
4.5 Addition von relativistischen Geschwindigkeiten	195
4.6 Galilei- und Lorentz-Raumzeitmannigfaltigkeiten	197
4.7 Bahnenkurven und Eigenzeit	201
4.8 Relativistische Dynamik	202
4.8.1 Relativistisches Kraftgesetz	202
4.8.2 Energie-Impulsvektor	203
4.8.3 Die Lorentzkraft	206

4.9	Zeitdilatation und Längenkontraktion	208
4.10	Mehr über die Bewegung kräftefreier Teilchen	209
4.11	Die konforme Gruppe	212
5.	Geometrische Aspekte der Mechanik	215
5.1	Mannigfaltigkeiten von verallgemeinerten Koordinaten	216
5.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	218
5.2.1	Der Euklidische Raum \mathbb{R}^n	218
5.2.2	Glatte oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten	219
5.2.3	Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten	221
5.3	Geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten	225
5.3.1	Funktionen und Kurven auf Mannigfaltigkeiten	226
5.3.2	Tangentialvektoren an eine glatte Mannigfaltigkeit	228
5.3.3	Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit	229
5.3.4	Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten	231
5.3.5	Äußere Formen	234
5.4	Kalkül auf Mannigfaltigkeiten	236
5.4.1	Differenzierbare Abbildungen von Mannigfaltigkeiten	236
5.4.2	Integralkurven von Vektorfeldern	238
5.4.3	Äußeres Produkt von Einsformen	239
5.4.4	Die äußere Ableitung	241
5.4.5	Äußere Ableitung und Vektoren im \mathbb{R}^3	242
5.5	Hamilton-Jacobische und Lagrangesche Mechanik	245
5.5.1	Koordinatenmannigfaltigkeit Q , Geschwindigkeitsraum TQ , und Phasenraum T^*Q	245
5.5.2	Die kanonische Einsform auf dem Phasenraum (T^*Q)	248
5.5.3	Die kanonische Zweiform als symplektische Form auf M	251
5.5.4	Symplektische Zweiform und Satz von Darboux	252
5.5.5	Die kanonischen Gleichungen	255
5.5.6	Die Poissonklammer	258
5.5.7	Zeitabhängige Hamiltonsche Systeme	261
5.6	Lagrangesche Mechanik und Lagrange-Gleichungen	263
5.6.1	Zusammenhang der beiden Formulierungen der Mechanik	263
5.6.2	Die Lagrangesche Zweiform	264
5.6.3	Energie als Funktion auf TQ und Lagrangesches Vektorfeld	266
5.6.4	Vektorfelder auf dem Geschwindigkeitsraum TQ und Lagrangesche Gleichungen	267
5.6.5	Legendretransformation und Zuordnung von Lagrange- und Hamiltonfunktion	269
6.	Stabilität und Chaos	273
6.0	Qualitative Dynamik	273
6.1	Vektorfelder als dynamische Systeme	274
6.1.1	Einige Definitionen für Vektorfelder und ihre Integralkurven	276
6.1.2	Gleichgewichtslagen und Linearisierung von Vektorfeldern	278
6.1.3	Stabilität von Gleichgewichtslagen	281
6.1.4	Kritische Punkte von Hamiltonschen Vektorfeldern	283
6.1.5	Stabilität und Instabilität beim kräftefreien Kreisel	286

6.2 Langzeitverhalten dynamischer Flüsse und Abhängigkeit von äußeren Parametern	287
6.2.1 Strömung im Phasenraum	288
6.2.2 Allgemeinere Stabilitätskriterien	289
6.2.3 Attraktoren	292
6.2.4 Die Poincaréabbildung	295
6.2.5 Verzweigungen von Flüssen bei kritischen Punkten	299
6.2.6 Verzweigungen von periodischen Bahnen	302
6.3 Deterministisches Chaos	304
6.3.1 Iterative Abbildungen in einer Dimension	304
6.3.2 Quasi-Definition von Chaos	306
6.3.3 Ein Beispiel: Die logistische Gleichung	308
6.4 Quantitative Aussagen über ungeordnete Bewegung	312
6.4.1 Aufbruch in deterministisches Chaos	312
6.4.2 Liapunovsche Charakteristische Exponenten	316
6.4.3 Seltsame Attraktoren und Fraktale	319
6.5 Chaotische Bewegungen in der Himmelsmechanik	320
6.5.1 Rotationsdynamik von Planetensatelliten	321
6.5.2 Bahndynamik von Planetoiden mit chaotischem Verhalten	325
7. Kontinuierliche Systeme	329
7.1 Diskrete und kontinuierliche Systeme	329
7.2 Grenzübergang zum kontinuierlichen System	333
7.3 Hamiltonsches Extremalprinzip für kontinuierliche Systeme	334
7.4 Kanonisch konjugierter Impuls und Hamiltondichte	336
7.5 Beispiel: Die Pendelkette	337
Anhang	341
Einige mathematische Begriffe	341
Literatur	345
Aufgaben	349
Sachverzeichnis	365