

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Elementare Newtonsche Mechanik</b>	<b>1</b>
1.0 Die Newtonschen Gesetze (1687) und ihre Interpretation	1
1.1 Gleichförmig geradlinige Bewegung und Inertialsysteme	4
1.2 Satz über Inertialsysteme	5
1.3 Impuls und Kraft	5
1.4 Typische Kräfte; Bemerkung über Maßeinheiten	7
1.5 Raum, Zeit und Kräfte	9
1.6 Das Zweiteilchensystem mit inneren Kräften	10
1.6.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung	10
1.6.2 Beispiel: Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Keplerproblem)	10
1.6.3 Schwerpunkts- und Relativimpuls im Zweiteilchensystem	15
1.7 Systeme von endlich vielen Teilchen	15
1.8 Der Schwerpunktsatz	16
1.9 Der Drehimpulssatz	17
1.10 Der Energiesatz	17
1.11 Das abgeschlossene $n$ -Teilchensystem	18
1.12 Galileitransformationen	19
1.13 Bemerkungen über Raum und Zeit bei Galileiinvarianz	22
1.14 Konservative Kraftfelder	24
1.15 Eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes	26
1.16 Beispiele für Bewegungen in einer Dimension	27
1.16.1 Harmonischer Oszillator	27
1.16.2 Das ebene mathematische Pendel im Schwerfeld	28
1.17 Phasenraum für das $n$ -Teilchensystem (im $\mathbb{R}^3$ )	29
1.18 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen von (1.41)	30
1.19 Physikalische Konsequenzen von Satz aus Abschnitt 1.18	31
1.20 Lineare Systeme	33
1.21 Zur Integration eindimensionaler Bewegungsgleichungen	35
1.22 Beispiel: Ebenes Pendel mit beliebigem Ausschlag	36
1.23 Beispiel: Zweiteilchensystem mit Zentralkraft	38
1.24 Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte	41
1.25 Beispiele zu Abschnitt 1.24	43
1.26 Streuung zweier Teilchen, die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken: Kinematik	45
1.27 Zweiteilchenstreuung mit Zentralkraft: Dynamik	48
1.28 Beispiel: Coulombstreuung zweier Teilchen mit gleichen Massen und Ladungen	51

1.29 Ausgedehnte mechanische Körper .....	54
1.30 Virial und zeitliche Mittelwerte .....	57
Anhang: Praktische Übungen .....	59
<b>2. Die Prinzipien der kanonischen Mechanik .....</b>	<b>63</b>
2.1 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten .....	63
2.1.1 Definition von Zwangsbedingungen .....	63
2.1.2 Generalisierte Koordinaten .....	64
2.2 Das d'Alembertsche Prinzip .....	65
2.2.1 Definition der virtuellen Verrückungen .....	65
2.2.2 Statischer Fall .....	65
2.2.3 Dynamischer Fall .....	66
2.3 Die Lagrangeschen Gleichungen .....	67
2.4 Beispiele zu Abschnitt 2.3 .....	68
2.5 Exkurs über Variationsprinzipien .....	70
2.6 Hamiltonsches Extremalprinzip .....	72
2.7 Die Euler-Lagrangegleichungen .....	73
2.8 Beispiele zu Abschnitt 2.7 .....	74
2.9 Anmerkung über die Nicht-Eindeutigkeit der Lagrangefunktion .....	75
2.10 Eichtransformationen an der Lagrangefunktion .....	75
2.11 Zulässige Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten .....	76
2.12 Die Hamiltonfunktion und ihr Zusammenhang mit der Lagrangefunktion $L$ .....	78
2.13 Legendretransformation für den Fall einer Variablen .....	79
2.14 Legendretransformation im Fall mehrerer Veränderlicher .....	80
2.15 Kanonische Systeme .....	82
2.16 Beispiele zu Abschnitt 2.15 .....	82
2.17 Variationsprinzip auf die Hamiltonfunktion angewandt .....	84
2.18 Symmetrien und Erhaltungssätze .....	84
2.19 Satz von E. Noether .....	85
2.20 Infinitesimale Erzeugende für Drehung um eine Achse .....	86
2.21 Exkurs über die Drehgruppe .....	88
2.22 Infinitesimale Drehungen und ihre Erzeugenden .....	90
2.23 Kanonische Transformationen .....	91
2.24 Beispiele von kanonischen Transformationen .....	95
2.25 Die Struktur der kanonischen Gleichungen .....	96
2.26 Beispiel: Lineares, autonomes System in einer Dimension .....	97
2.27 Kanonische Transformationen in kompakter Notation .....	99
2.28 Zur symplektischen Struktur des Phasenraums .....	101
2.29 Der Liouvillesche Satz .....	103
2.29.1 Lokale Form .....	104
2.29.2 Integrale Form .....	105
2.30 Beispiele zum Liouvilleschen Satz .....	106
2.31 Die Poissonklammer .....	108
2.32 Eigenschaften der Poissonklammern .....	110
2.33 Infinitesimale kanonische Transformationen .....	112
2.34 Integrale der Bewegung .....	114
2.35 Hamilton-Jacobische Differentialgleichung .....	116
2.36 Beispiele zur Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung .....	117

2.37	Hamilton-Jacobigleichung und integrable Systeme	119
2.37.1	Lokale Glättung von Hamiltonschen Systemen	119
2.37.2	Integrable Systeme	122
2.37.3	Winkel- und Wirkungsvariable	126
2.38	Störungen an quasiperiodischen Hamiltonschen Systemen	128
2.39	Autonome, nichtentartete Hamiltonsche Systeme in der Nähe von integrablen Systemen	130
2.40	Beispiele, Mittelungsmethode	131
2.40.1	Anharmonischer Oszillator	131
2.40.2	Mittelung von Störungen	133
	Anhang: Praktische Übungen	135
<b>3.</b>	<b>Mechanik des starren Körpers</b>	<b>141</b>
3.0	Definition des starren Körpers	141
3.1	Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers	143
3.2	Kinetische Energie und Trägheitstensor	144
3.3	Eigenschaften des Trägheitstensors	145
3.4	Der Satz von Steiner	149
3.5	Beispiele zum Satz von Steiner	149
3.6	Drehimpuls des starren Körpers	152
3.7	Kräftefreie Bewegung von starren Körpern	153
3.8	Die Eulerschen Winkel	155
3.9	Definition der Eulerschen Winkel	156
3.10	Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers	157
3.11	Die Eulerschen Gleichungen	160
3.12	Anwendungsbeispiel: Der kräftefreie Kreisel	161
3.13	Kräftefreier Kreisel und geometrische Konstruktionen	164
3.14	Der Kreisel im Rahmen der kanonischen Mechanik	167
3.15	Beispiel: Symmetrischer Kinderkreisel im Schwerfeld	170
3.16	Anmerkung zum Kreiselproblem	172
	Anhang: Praktische Übungen	172
<b>4.</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>175</b>
4.0	Schwierigkeiten der nichtrelativistischen Mechanik	176
4.1	Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	178
4.2	Die Lorentztransformationen	179
4.3	Analyse der Lorentz- und Poincarétransformationen	184
4.3.1	Drehungen und Spezielle Lorentztransformationen	186
4.3.2	Bedeutung der Speziellen Lorentztransformationen	189
4.4	Zerlegung von Lorentztransformationen in ihre Komponenten	190
4.4.1	Satz über orthochrone eigentliche Lorentztransformationen	190
4.4.2	Korollar zum Satz 4.4.1 und einige Konsequenzen	192
4.5	Addition von relativistischen Geschwindigkeiten	195
4.6	Galilei- und Lorentz-Raumzeitmannigfaltigkeiten	197
4.7	Bahnkurven und Eigenzeit	201
4.8	Relativistische Dynamik	202
4.8.1	Relativistisches Kraftgesetz	202
4.8.2	Energie-Impulsvektor	203
4.8.3	Die Lorentzkraft	206

4.9	Zeitdilatation und Längenkontraktion .....	208
4.10	Mehr über die Bewegung kräftefreier Teilchen .....	209
4.11	Die konforme Gruppe .....	212
<b>5.</b>	<b>Geometrische Aspekte der Mechanik .....</b>	<b>215</b>
5.1	Mannigfaltigkeiten von verallgemeinerten Koordinaten .....	216
5.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten .....	218
5.2.1	Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ .....	218
5.2.2	Glatte oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten .....	219
5.2.3	Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten .....	221
5.3	Geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten .....	225
5.3.1	Funktionen und Kurven auf Mannigfaltigkeiten .....	226
5.3.2	Tangentialvektoren an eine glatte Mannigfaltigkeit .....	228
5.3.3	Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit .....	229
5.3.4	Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten .....	231
5.3.5	Äußere Formen .....	234
5.4	Kalkül auf Mannigfaltigkeiten .....	236
5.4.1	Differenzierbare Abbildungen von Mannigfaltigkeiten .....	236
5.4.2	Integralkurven von Vektorfeldern .....	238
5.4.3	Äußeres Produkt von Einsformen .....	239
5.4.4	Die äußere Ableitung .....	241
5.4.5	Äußere Ableitung und Vektoren im $\mathbb{R}^3$ .....	242
5.5	Hamilton-Jacobische und Lagrangesche Mechanik .....	245
5.5.1	Koordinatenmannigfaltigkeit $Q$ , Geschwindigkeitsraum $TQ$ , und Phasenraum $T^*Q$ .....	245
5.5.2	Die kanonische Einsform auf dem Phasenraum $(T^*Q)$ .....	248
5.5.3	Die kanonische Zweiform als symplektische Form auf $M$ .....	251
5.5.4	Symplektische Zweiform und Satz von Darboux .....	252
5.5.5	Die kanonischen Gleichungen .....	255
5.5.6	Die Poissonklammer .....	258
5.5.7	Zeitabhängige Hamiltonsche Systeme .....	261
5.6	Lagrangesche Mechanik und Lagrangegleichungen .....	263
5.6.1	Zusammenhang der beiden Formulierungen der Mechanik ....	263
5.6.2	Die Lagrangesche Zweiform .....	264
5.6.3	Energie als Funktion auf $TQ$ und Lagrangesches Vektorfeld ...	266
5.6.4	Vektorfelder auf dem Geschwindigkeitsraum $TQ$ und Lagrangesche Gleichungen .....	267
5.6.5	Legendretransformation und Zuordnung von Lagrange- und Hamiltonfunktion .....	269
<b>6.</b>	<b>Stabilität und Chaos .....</b>	<b>273</b>
6.0	Qualitative Dynamik .....	273
6.1	Vektorfelder als dynamische Systeme .....	274
6.1.1	Einige Definitionen für Vektorfelder und ihre Integralkurven ..	276
6.1.2	Gleichgewichtslagen und Linearisierung von Vektorfeldern ....	278
6.1.3	Stabilität von Gleichgewichtslagen .....	281
6.1.4	Kritische Punkte von Hamiltonschen Vektorfeldern .....	283
6.1.5	Stabilität und Instabilität beim kräftefreien Kreisel .....	286

6.2	Langzeitverhalten dynamischer Flüsse und Abhängigkeit von äußeren Parametern .....	287
6.2.1	Strömung im Phasenraum .....	288
6.2.2	Allgemeinere Stabilitätskriterien .....	289
6.2.3	Attraktoren .....	292
6.2.4	Die Poincaréabbildung .....	295
6.2.5	Verzweigungen von Flüssen bei kritischen Punkten .....	299
6.2.6	Verzweigungen von periodischen Bahnen .....	302
6.3	Deterministisches Chaos .....	304
6.3.1	Iterative Abbildungen in einer Dimension .....	304
6.3.2	Quasi-Definition von Chaos .....	306
6.3.3	Ein Beispiel: Die logistische Gleichung .....	308
6.4	Quantitative Aussagen über ungeordnete Bewegung .....	312
6.4.1	Aufbruch in deterministisches Chaos .....	312
6.4.2	Liapunovsche Charakteristische Exponenten .....	316
6.4.3	Seltsame Attraktoren und Fraktale .....	319
6.5	Chaotische Bewegungen in der Himmelsmechanik .....	320
6.5.1	Rotationsdynamik von Planetensatelliten .....	321
6.5.2	Bahndynamik von Planetoiden mit chaotischem Verhalten ....	325
7.	Kontinuierliche Systeme .....	329
7.1	Diskrete und kontinuierliche Systeme .....	329
7.2	Grenzübergang zum kontinuierlichen System .....	333
7.3	Hamiltonsches Extremalprinzip für kontinuierliche Systeme .....	334
7.4	Kanonisch konjugierter Impuls und Hamiltondichte .....	336
7.5	Beispiel: Die Pendelkette .....	337
Anhang	.....	341
Einige mathematische Begriffe	.....	341
Literatur	.....	345
Aufgaben	.....	349
Sachverzeichnis	.....	365