

Frieder Häfner · Dietrich Sames
Hans-Dieter Voigt

Wärme- und Stofftransport

Mathematische Methoden

Mit 280 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona Budapest

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	XIV
Einleitung	1
1 Transportmechanismen und ihre mathematische Beschreibung	5
1.1 Wärmeleitung in Festkörpern und ruhenden Fluiden	6
1.1.1 Das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung	6
1.1.2 Die Wärmeleitungsgleichung	7
1.2 Filterströmung – Geoströmung – Strömung in porösen Medien	8
1.2.1 Das Darcysche Gesetz	8
1.2.2 Die Differentialgleichungen der Filterströmung	10
1.3 Isotherme Diffusion	14
1.3.1 Das Ficksche Gesetz der Diffusion	14
1.3.2 Die Diffusionsgleichung	16
1.3.3 Räumliche Verteilung und Diffusion von Neutronen	16
1.4 Stofftransport	17
1.4.1 Konvektion und Dispersion	18
1.4.2 Die Stofftransportgleichung	21
1.5 Wärmetransport	24
1.6 Quellen und Senken	26
1.7 Koordinatensysteme	27
1.8 Die partiellen Differentialgleichungen für die Strömung und den Transport	29
1.8.1 Die Strömungsgleichung	29
1.8.2 Die Transportgleichung	31
1.9 Anfangs- und Randbedingungen	34
1.9.1 Anfangsbedingungen	35
1.9.2 Randbedingungen (RB) – Randwerte	35

1.9.3 Randbedingungen im Unendlichen	40
1.9.4 Randwert- und Anfangs-Randwertaufgaben	41
2 Einige Lösungsmethoden für Differentialgleichungen	43
2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung	43
2.1.1 Differentialgleichungen 1.Ordnung	43
2.1.2 Differentialgleichungen 2.Ordnung	44
2.2 Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe der Fourierschen Methode	54
2.2.1 Allgemeine Darstellung der Methode	54
2.2.2 Lösung der Strömungsgleichung	59
2.2.3 Lösung der Transportgleichung	62
2.2.4 Randbedingungen 3. Art für die Strömungsgleichung	65
2.2.5 Die schnelle Fourier-Transformation	68
2.3 Laplace-Transformation und Laplace- Rücktransformation	72
2.3.1 Die Laplace-Transformation	72
2.3.2 Rechenregeln bei der Laplace-Transformation	73
2.3.3 Die Rücktransformation	77
2.3.4 Berechnung von Korrespondenzen	80
2.3.5 Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation	83
2.3.6 Die praktische Durchführung	84
2.3.7 Numerische Verfahren zur Rücktransformation	87
2.4 Numerische Lösung von partiellen Differential- gleichungen	92
2.4.1 Die Finite-Differenzen-Methode	95
2.4.2 Die Finite-Elemente-Methode	105
2.4.3 Die Bilanzmethode	114
2.4.4 Die Randintegralgleichungsmethode	129
2.4.5 Die Charakteristikenmethode	135
2.4.6 Die Random-Walk-Methode	138
2.4.7 Resumé	140
3 Typische Beispiele aus Arbeits- und Umwelt	145
3.1 Wärmeleitung durch eine Hauswand	145
3.2 Diffusion in einem Filterkörper	151
3.3 Anströmung eines Brunnens	158
3.4 Wärmetransport in Erdschichten	166
3.5 Grundwasserreinigung in der Bodenzone – Denitrifikation	170

3.6 Temperaturspannungen in einem Massenbeton-Fundament	176
3.6.1 Temperaturberechnung	177
3.6.2 Spannungsberechnung	178
3.7 Stofftransport in einem Rieselfilm	181
3.7.1 Das verfahrenstechnische Problem	182
3.7.2 Allgemeine Aufgabenstellung und Lösungsweg	184
3.7.3 Frobenius-Verfahren	185
3.7.4 Darstellung der Lösung an einem Beispiel	186
3.8 Förderung aus einer Erdgasbohrung	187
3.8.1 Die analytische Lösung	189
3.8.2 Die numerische Lösung	194
3.8.3 Vergleich der analytischen und der numerischen Lösung	196
4 Eindimensionale Strömung, Wärmeleitung und Diffusion	199
4.1 Aufgaben ohne Quellen	199
4.1.1 Aufgaben in kartesischen Koordinaten in einseitig begrenzten Gebieten	200
4.1.2 Aufgaben in kartesischen Koordinaten in beidseitig begrenzten Gebieten	202
4.1.3 Radialsymmetrische Aufgaben in einseitig begrenzten Gebieten	211
4.1.4 Radialsymmetrische Aufgaben in beidseitig begrenzten Gebieten	219
4.1.5 Kugelsymmetrische Aufgaben in einseitig begrenzten Gebieten	228
4.1.6 Kugelsymmetrische Aufgaben in beidseitig begrenzten Gebieten	235
4.2 Aufgaben mit Quellen	240
4.2.1 Punktquellen	240
4.2.2 Linienquellen	242
4.2.3 Flächenquellen	244
4.2.4 Innere homogene Quellen	253
4.2.5 Ortsabhängige innere Quellen	262
4.3 Aufgaben mit ortsabhängigen Anfangsbedingungen	265
4.3.1 Aufgaben in kartesischen Koordinaten in einseitig begrenzten Gebieten	265
4.3.2 Aufgaben in kartesischen Koordinaten in beidseitig begrenzten Gebieten mit linearer Anfangsbedingung und der Randbedingung 1. oder 3. Art	269
4.3.3 Radialsymmetrische Aufgabe in einem unbegrenzten Gebiet mit stückweise konstanter Anfangsbedingung	271

4.3.4 Radialsymmetrische Aufgaben in einseitig begrenzten Gebieten	272
4.3.5 Radialsymmetrische Aufgaben in beidseitig begrenzten Gebieten mit logarithmischer Anfangsbedingung und Randbedingungen 1. Art an beiden Rändern oder Randbedingungen 2. und 1. Art	275
4.3.6 Kugelsymmetrische Aufgabe in einem unbegrenzten Gebiet mit stückweise konstanter Anfangsbedingung	277
4.3.7 Kugelsymmetrische Aufgaben in einseitig begrenzten Gebieten mit parabolischer Anfangsbedingung und der Randbedingung 1. oder 3. Art	279
4.4 Aufgaben mit zeitabhängigen Randbedingungen	279
4.4.1 Randbedingungen in Form eines zeitabhängigen Polynoms	280
4.4.2 Randbedingungen mit exponentiellem Verlauf	287
4.4.3 Randbedingungen mit periodischem Verlauf	290
4.4.4 Differentielle Randbedingungen	292
4.5 Aufgaben mit ortsabhängigen Stoffwerten	303
4.5.1 Aufgaben in kartesischen Koordinaten in einseitig begrenzten Gebieten	303
4.5.2 Aufgaben in kartesischen Koordinaten in beidseitig begrenzten Gebieten mit gebietsweise unterschiedlichen Stoffwerten	306
4.5.3 Radialsymmetrische Aufgaben mit gebietsweise unterschiedlichen Stoffwerten	308
4.5.4 Kugelsymmetrische Aufgabe mit gebietsweise unterschiedlichen Stoffwerten und Anfangsbedingungen	311
4.5.5 Radialsymmetrische Aufgaben mit stetig veränderlichen Stoffwerten	312
4.6 Spezielle Lösungen in einseitig begrenzten Gebieten	315
4.6.1 Nichtlineare radialsymmetrische Aufgaben	315
4.6.2 Aufgabe mit beweglicher Randbedingung in kartesischen Koordinaten	320
4.6.3 Strömung mit freiem Rand (Stefan-Problem)	320
5 Zweidimensionale Strömung, Wärmeleitung und Diffusion	332
5.1 Aufgaben in einseitig begrenzten, geschichteten Gebieten	332
5.1.1 Kartesische Koordinaten bei quasistationärem Austausch	333

5.1.2	Kartesische Koordinaten bei instationärem Austausch	338
5.1.3	Radialsymmetrische Aufgaben	340
5.2	Aufgaben in geschichteten Gebieten mit gebietsweise geringen Leitfähigkeiten	343
5.2.1	Aufgaben in kartesischen Koordinaten	344
5.2.2	Radialsymmetrische Aufgaben	349
5.3	Aufgaben in geschichteten Gebieten mit verhindertem Austausch zwischen den Schichten	353
5.3.1	Kartesische Koordinaten mit Randbedingungen 2. Art	354
5.3.2	Radialsymmetrische Aufgaben mit Randbedingungen 2. Art	357
5.3.3	Radialsymmetrische Aufgabe in einem beidseitig begrenzten Gebiet mit logarithmischer Anfangsbedingung	360
5.3.4	Kartesische Koordinaten in einem einseitig begrenzten Gebiet mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen und Randbedingungen 2. Art	361
5.3.5	Radialsymmetrische Aufgaben in einem einseitig begrenzten Gebiet mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen und Randbedingungen 2. Art	363
5.4	Aufgaben in mehrdimensionalen Gebieten	366
5.4.1	Prinzipielle Formen der Lösungen	366
5.4.2	Lösung für einen halbunendlichen Zylinder mit Randbedingungen 1. Art an Grundfläche und Mantel	368
5.4.3	Lösung für eine Ecke mit Randbedingungen 2. Art	370
6	Eindimensionaler Wärme- und Stofftransport	372
6.1	Aufgaben in kartesischen Koordinaten in einseitig begrenzten bzw. unendlichen Gebieten	372
6.1.1	Randbedingungen 1. Art	372
6.1.2	Randbedingungen 3. Art	408
6.1.3	Eindimensionaler Transport bei inhomogenen Parametern	413
6.1.4	Transport mit freiem Rand (Stefan -Problem)	416
6.2	Zweiseitig begrenztes Gebiet	421
6.3	Radialsymmetrische Probleme	425
6.3.1	Quellenfreie Aufgabenstellungen	425
6.3.2	Aufgabenstellungen mit Quellen	439
6.4	Kugelsymmetrische Probleme	440

6.5 Eindimensionaler Transport mit Wechselwirkungen zwischen unterschiedlichen Phasen	443
6.5.1 Wechselwirkungsmodelle	443
6.5.2 Wechselwirkungen nach dem Gleichgewichtskonzept	445
6.5.3 Wechselwirkungen nach dem stationären oder linearen Nichtgleichgewichtskonzept	445
6.5.4 Wechselwirkungen nach dem nichtlinearen Nichtgleichgewichtskonzept	448
6.5.5 Wechselwirkungen nach dem stationären oder linearen Nichtgleichgewichtskonzept bei radialsymmetrischem Transport	450
7 Mehrdimensionaler Wärme- und Stofftransport	456
7.1 Punktquellen im Raum	456
7.1.1 Unendlicher zweidimensionaler Raum, Punktquelle im Ursprung	457
7.1.2 Unendlicher dreidimensionaler Raum, Punktquelle im Ursprung	462
7.2 Linien-, Flächen- und Volumenquellen	465
7.2.1 Unendlicher zweidimensionaler Raum mit Linien- und Flächenquellen	468
7.2.2 Unendlicher dreidimensionaler Raum mit Linien-, Flächen- und Volumenquellen vom Dirac-Typ (Impulsquellen)	471
7.3 Transport in geschichteten Medien	473
7.3.1 Lauwerier-Probleme	474
7.3.2 Erweiterte Lauwerier-Probleme	478
7.3.3 Dreidimensionale Lauwerier-Probleme	484
7.3.4 Transport mit Konvektion in allen Schichten	490
7.3.5 Geschichteter Transportraum in Zylindergeometrie	494
8 Numerische Lösung von mehrdimensionalen partiellen Differentialgleichungen	497
8.1 Lösung der Strömungsgleichung mit der impliziten Bilanzmethode	497
8.2 Lösung großer, schwach besetzter, diagonal dominanter Gleichungssysteme	502
8.2.1 Matrixformulierung des Gauß-Algorithmus	502
8.2.2 Der Algorithmus "Geordnete Elimination"	505
8.2.3 Das Restkorrekturverfahren	508
8.2.4 Der Algorithmus "Unvollständige LU-Zerlegung"	508

8.3 Lösung der Transportgleichung mit der expliziten Bilanzmethode	512
9 Verfahren zur optimalen Prozeßsteuerung	518
9.1 Optimale Steuerung eines Aufheizprozesses	519
9.1.1 Zielstellung der Steuerung	519
9.1.2 Lösung des Anfangs-Randwertproblems	522
9.1.3 Lösung des Steuerproblems	524
9.2 Einige Begriffe und Lösungsmethoden zur optimalen Steuerung	527
9.2.1 Begriffe der Steuertheorie	527
9.2.2 Bemerkungen zu Existenz und Eindeutigkeit optimaler Lösungen	528
9.2.3 Lösung von Steuerproblemen mit Suchverfahren	531
9.3 Beispiel einer Prozeßsteuerung – Steuerung der Temperaturballigkeit von Walzen	534
9.3.1 Darstellung des mathematischen Modelles	534
9.3.2 Lösung des Steuerproblems	539
9.3.3 Anwendung	542
10 Parameteridentifikation	546
10.1 Graphisch-analytische Parameterbestimmung (Geradenverfahren)	547
10.2 Parameterbestimmung mit dem Typkurven-Verfahren	553
10.3 Parameterbestimmung mit mathematischen Suchverfahren	556
10.4 Parameteridentifikation bei mehrdimensionalen Strömungs- und Transportvorgängen	556
10.4.1 Gradientenverfahren	557
10.4.2 Ein spezielles Gauß-Newton-Verfahren	560
Anhang	565
A Tabellen physikalischer Stoffwerte	565
B Spezielle mathematische Funktionen	570
C Korrespondenzen der Laplace-Transformation	592
D FORTRAN-Programme	602
Literatur	613
Sachverzeichnis	623