

# Inhaltsverzeichnis

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 1. | Metrische Räume. Topologische Grundbegriffe .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 1  |
|      | 1.1 Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ 6 * 1.2 Konvergenz 8 * 1.3 Die Regeln von de Morgan 10 * 1.4 Äquivalenzrelation 10 * 1.5 Metrischer Raum 11 * 1.6 Konvergenz und Vollständigkeit 12 * 1.7 Normierter Raum und Banachraum 15 * 1.8 Die Maximumnorm 17 * 1.9 Innenproduktraum und Hilbertraum 19 * 1.10 Der Hilbertsche Folgenraum $l^2$ 20 * 1.11 Innerer Punkt, Randpunkt, Häufungspunkt 21 * 1.12 Offene und abgeschlossene Mengen 22 * 1.13 Satz über Inneres, Rand und abgeschlossene Hülle 23 * 1.14 Charakterisierung der abgeschlossenen Hülle 24 * 1.15 Metrischer Teilraum 25 * 1.16 Kompakte Mengen 25 * 1.17 Abstand zwischen Mengen. Umgebungen von Mengen 26 * 1.18 Orthogonalität und Winkel im $\mathbb{R}^n$ 28 * 1.19 Unterräume und Ebenen im $\mathbb{R}^n$ 29 * 1.20 Gerade, Strecke, Polygonzug 30 * 1.21 Hyperebenen und Halbräume 31 * 1.22 Konvexe Mengen 32 * 1.23 Konvexe Funktionen 35 * Aufgaben 35 |    |
| § 2. | Grenzwert und Stetigkeit .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 39 |
|      | 2.1 Grenzwert und Stetigkeit 41 * 2.2 Schwankung einer Funktion. Limes superior und Limes inferior 45 * 2.3 Stetigkeitsmodul 46 * 2.4 Komposition stetiger Funktionen 46 * 2.5 Stetige vektor- und skalarwertige Funktionen 47 * 2.6 Polynome in mehreren Veränderlichen 48 * 2.7 Stetigkeit bezüglich einzelner Veränderlichen 48 * 2.8 Lineare Abbildungen 49 * 2.9 Stetigkeit und Kompaktheit 51 * 2.10 Extremwerte bezüglich einzelner Variablen 52 * 2.11 Satz über die gleichmäßige Stetigkeit 53 * 2.12 Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion 54 * 2.13 Das Halbierungsverfahren 54 * 2.14 Offene Überdeckungen kompakter Mengen 57 * 2.15 Gleichmäßige Konvergenz 58 * 2.16 Satz von Dini 59 * 2.17 Weierstraßsches Majorantenkriterium 59 * 2.18 Potenzreihen in mehreren Veränderlichen 59 * 2.19 Fortsetzung stetiger Funktionen 61 * 2.20 Landau-Symbole 64 * Aufgaben 65                                                              |    |
| § 3. | Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 68 |
|      | 3.1 Partielle Ableitungen. Gradient 70 * 3.2 Graphische Darstellung einer Funktion. Höhenlinien 72 * 3.3 Vertauschung der Reihenfolge der Differentiation 75 3.4 Der allgemeine Fall 76 * 3.5 Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante 78 * 3.6 Höhere Ableitungen. Die Klassen $C^k$ 79 * 3.7 Lineare Differentialoperatoren 80 * 3.8 Differenzierbarkeit und vollständiges Differential 81 * 3.9 Satz 83 * 3.10 Die Kettenregel 85 * 3.11 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 87 * 3.12 Richtungsableitungen 89 * 3.13 Der Satz von Taylor 90 * 3.14 Das Taylorpolynom 93 * 3.15 Die Taylorsche Reihe 94 * 3.16 Fläche und Tangentialhyperebene 96 * 3.17 Die Hessematrix 99 * 3.18 Differentiation im Komplexen. Holomorphie 100 * 3.19 Cauchy-Riemannsche                                                                                                                                                                                 |    |

Differentialgleichungen. Satz 101 \* 3.20 Bewegung, winkeltreue und konforme Abbildung 102 \* Aufgaben 103

#### § 4. Implizite Funktionen. Maxima und Minima ..... 106

4.1 Fixpunkte kontrahierender Abbildungen 106 \* 4.2 Einige Hilfsmittel. Lipschitzbedingung im  $\mathbb{R}^n$  109 \* 4.3 Das Newton-Verfahren 111 \* 4.4 Implizite Funktionen 111 \* 4.5 Satz über implizite Funktionen 114 \* 4.6 Umkehrabbildungen. Diffeomorphismen 118 \* 4.7 Offene Abbildungen 121 \* 4.8 Quadratische Formen 122 \* 4.9 Maxima und Minima 124 \* 4.10 Das Fermatsche Kriterium für lokale Extrema 124 \* 4.11 Hinreichende Bedingung für ein Extremum 125 \* 4.12 Extrema mit Nebenbedingungen 128 \* 4.13 Lagrangesche Multiplikatorenregel 130 \* 4.14 Corollar (Lagrangesche Multiplikatorenregel) 131 \* 4.15 Lokale Klassifikation von glatten Funktionen 133 \* 4.16 Lemma von Marston Morse 135 \* Aufgaben 138

#### § 5. Allgemeine Limestheorie. Wege und Kurven ..... 142

5.1 Gerichtete Menge und Netz 142 \* 5.2 Der Grenzwert eines Netzes 143 \* 5.3 Konvergenzkriterium von Cauchy 145 \* 5.4 Reellwertige Netze 145 \* 5.5 Monotone Netze 146 \* 5.6 Das Riemann-Integral als Netzlimes 146 \* 5.7 Netzlimes für Teilintervalle 147 \* 5.8 Konfinale Teilfolgen 148 \* 5.9 Metrische Ordnung und Riemannsche Summendefinition des Integrals 149

##### Wege und Kurven 151

5.10 Weg und Kurve 153 \* 5.11 Die Weglänge 160 \* 5.12 Die Weglänge als Funktion von  $t$  161 \* 5.13 Äquivalente Darstellungen, Orientierung 163 \* 5.14 Die Länge einer Kurve 164 \* 5.15 Die Bogenlänge als Parameter 168 \* 5.16 Tangente und Normalenebene 169 \* 5.17 Ebene Kurven, positive Normalen 170 \* 5.18 Krümmung und Krümmungsradius 171 \* 5.19 Ebene Kurven 174 \* 5.20 Funktionen von beschränkter Variation 175 \* 5.21 Darstellungssatz von C. Jordan 177 \* 5.22 Satz über Rektifizierbarkeit 177 \* 5.23 Die Bewegungsgleichungen 178 \* 5.24 Die Lösung des Zweikörperproblems 179 \* 5.25 Satz über das Zweikörperproblem 182 \* 5.26 Eindeigkeitssatz 184 \* 5.27 Historisches zu den Keplerschen Gesetzen 184 \* Aufgaben 186

#### § 6. Das Riemann-Stieltjes-Integral. Kurven- und Wegintegrale ..... 190

6.1 Das Riemann-Stieltjes-Integral 191 \* 6.2 Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals 192 \* 6.3 Partielle Integration. Satz 193 \* 6.4 Transformation in ein Riemann-Integral. Satz 194 \* 6.5 Weitere Beispiele 194 \* 6.6 Bemerkungen 195 \* 6.7 Mittelwertsätze für Riemann-Stieltjes-Integrale 197 \* 6.8 Zweiter Mittelwertsatz für Riemannsche Integrale 197 \* 6.9 Kurvenintegrale bezüglich der Bogenlänge 198 \* 6.10 Eigenschaften von Kurvenintegralen 199 \* 6.11 Anwendungen 199 \* 6.12 Wegintegrale 201 \* 6.13 Eigenschaften und Rechenregeln für Wegintegrale 202 \* 6.14 Vektorfelder 203 \* 6.15 Bewegung in einem Kraftfeld 204 \* 6.16 Gradientenfelder. Stammfunktion und Potential 206 \* 6.17 Die Integrabilitätsbedingung 208 \* 6.18 Nochmals Kraftfelder 212 \* 6.19 Komplexe Wegintegrale 213 \* 6.20 Integralsatz von Cauchy 214 \* 6.21 Satz über Stammfunktionen 215 \* Aufgaben 216

#### § 7. Jordanscher Inhalt und Riemannsches Integral im $\mathbb{R}^n$ ..... 218

7.1 Anforderungen an den Inhaltsbegriff 219 \* 7.2 Zerlegungen eines Intervalls 220 \* 7.3 Intervallsummen 222 \* 7.4 Äußerer und innerer Inhalt. Jordan-

Inhalt 223 \* 7.5 Würfelsummen 225 \* 7.6 Quadrierbare Mengen. Satz 226 \* 7.7 Produktmengen 227 \* 7.8 Abbildungen von Mengen 228 \* 7.9 Lineare Abbildungen 229

### Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$ 231

7.10 Definition und einfache Eigenschaften des Integrals 232 \* 7.11 Satz über gliedweise Integration 237 \* 7.12 Jordanscher Inhalt und Riemannsches Integral 238 \* 7.13 Die Riemannsche Summendefinition des Integrals 239 \* 7.14 Parameterabhängige Integrale 241 \* 7.15 Iterierte Integrale. Der Satz von Fubini 243 \* 7.16 Das Cavalierische Prinzip 245 \* 7.17 Die Abbildung von Gebieten. Das Lemma von Sard 246 \* 7.18 Transformation von Integralen. Die Substitutionsregel 247 \* 7.19 Beispiele 250 \* 7.20 Uneigentliche Integrale 255 \* 7.21 Beispiele 256 \* 7.22 Die Faltung 258 \* 7.23 Approximation durch  $C^\infty$ -Funktionen. Mittelwerte 261 \* 7.24 Der Weierstraßsche Approximationssatz 263 \* 7.25 Masse und Schwerpunkt 265 \* 7.26 Potential einer Massenbelegung 266 \* 7.27 Rotationssymmetrische Massenbelegungen 268 \* Aufgaben 273

## § 8. Die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes ..... 277

8.1 Gaußscher Integralsatz in der Ebene 278 \* 8.2 Vektorprodukt und Parallelogrammfläche 281 \* 8.3 Flächen im  $\mathbb{R}^3$  283 \* 8.4 Der Inhalt einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  286 \* 8.5 Oberflächenintegrale 289 \* 8.6 Gaußscher Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$  291 \* 8.7 Physikalische Bedeutung des Gaußschen Satzes. Geschwindigkeitsfelder 294 \* 8.8 Gramsche Matrizen und Determinanten 296 \* 8.9 Der Inhalt von  $m$ -dimensionalen Flächen im  $\mathbb{R}^n$  297 \* 8.10 Der Fall  $m = n - 1$  299 \* 8.11 Die Rotation eines Vektorfeldes 301 \* 8.12 Der Satz von Stokes 301 \* Aufgaben 305

## § 9. Das Lebesgue-Integral ..... 308

9.1 Mathematische Vorbereitung. Das Rechnen in  $\overline{\mathbb{R}}$  311 \* 9.2 Intervalle 313 \* 9.3 Mengen. Algebren und  $\sigma$ -Algebren 314 \* 9.4 Das äußere Lebesgue-Maß 315 \* 9.5 Das Lebesguesche Maß 317 \* 9.6 Offene Mengen und  $G_\delta$ -Mengen 320 \* 9.7 Das Lebesguesche Integral im  $\mathbb{R}^n$  321 \* 9.8 Nichtnegative Funktionen 325 \* 9.9 Meßbare Funktionen 326 \* 9.10 Treppenfunktionen und Elementarfunktionen 327 \* 9.11 Meßbarkeit und Integrierbarkeit 329 \* 9.12 Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}^p$  und  $\mathbb{C}$  330 \* 9.13 Satz von Beppo Levi 331 \* 9.14 Satz von der majorisierten Konvergenz 332 \* 9.15 Lemma von Fatou 333 \* 9.16 Das Prinzip von Cavalieri 333 \* 9.17 Die Produktformel 334 \* 9.18 Satz von Fubini (1. Form) 335 \* 9.19 Die Substitutionsregel 336 \* 9.20 Die  $L^p$ -Räume 337 \* 9.21 Dichtesatz 340

### Das Lebesgue-Integral in $\mathbb{R}$ 341

9.22 Absolutstetige Funktionen 341 \* 9.23 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 342 \* 9.24 Überdeckungssatz von Vitali 342 \* 9.25 Satz 344 \* 9.26 Satz 344 \* 9.27 Satz 345 \* 9.28 Abschluß des Beweises 346 \* 9.29 Satz 347 \* 9.30 Partielle Integration 348 \* 9.31 Die Substitutionsregel für  $n = 1$  348 \* 9.32 Ausblicke 348 \* Aufgaben 349

## § 10. Fourierreihen ..... 354

10.1 Trigonometrische Reihe und Fourierreihe 358 \* 10.2 Satz von Riemann-Lebesgue 361 \* 10.3 Satz 361 \* 10.4 Konvergenzsatz 362 \* 10.5 Konvergenzsatz für Sprungstellen 363 \* 10.6 Gerade und ungerade Fortsetzung 364 \* 10.7 Umrechnung auf andere Periodenlängen 364 \* 10.8 Riemannscher Lokalisationsatz 365 \* 10.9 Gleichmäßige Konvergenz. Satz 365

**Die Hilbertraumtheorie der Fourierreihen 366**  
10.10 Orthonormalfolgen im Hilbertraum 366 \* 10.11 Fourierreihen bezüglich einer Orthonormalfolge 367 \* 10.12 Konvergenzsatz 368 \* 10.13 Vollständigkeit einer Orthonormalfolge 368 \* 10.14 Der Hilbertraum  $L^2_\pi$  369 \* 10.15 Satz 370 \* 10.16 Nochmals Absolutkonvergenz 371 \* Aufgaben 372

Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben ..... 374

Literatur ..... 383

Bezeichnungen ..... 384

Namen- und Sachverzeichnis ..... 386