

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Historische Einführung</i> . . . . .                                                                                                                                                                                               | 1  |
| <i>Zeittafel</i> . . . . .                                                                                                                                                                                                            | 6  |
| <b>Teil A. Elemente der Funktionentheorie</b>                                                                                                                                                                                         |    |
| <i>Kapitel 0. Komplexe Zahlen und stetige Funktionen</i> . . . . .                                                                                                                                                                    | 7  |
| § 1. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen . . . . .                                                                                                                                                                           | 7  |
| 1. Der Körper $\mathbb{C}$ – 2. $\mathbb{R}$ -lineare und $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ –<br>3. Skalarprodukt und absoluter Betrag – 4. Winkeltreue Abbildungen                               |    |
| § 2. Topologische Grundbegriffe . . . . .                                                                                                                                                                                             | 13 |
| 1. Metrische Räume – 2. Offene und abgeschlossene Mengen – 3. Konvergente Folgen. Häufungspunkte – 4. Historisches zum Konvergenzbegriff –<br>5. Kompakte Mengen                                                                      |    |
| § 3. Konvergente Folgen komplexer Zahlen . . . . .                                                                                                                                                                                    | 18 |
| 1. Rechenregeln – 2. Cauchysches Konvergenzkriterium. Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{C}$                                                                                                                              |    |
| § 4. Konvergente und absolut konvergente Reihen . . . . .                                                                                                                                                                             | 20 |
| 1. Konvergente Reihen komplexer Zahlen – 2. Absolut konvergente Reihen. Majorantenkriterium – 3. Umordnungssatz – 4. Historisches zur absoluten Konvergenz – 5. Bemerkungen zum Riemannschen Umordnungssatz –<br>6. Reihenproduktsatz |    |
| § 5. Stetige Funktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                     | 27 |
| 1. Stetigkeitsbegriff – 2. Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{C}(X)$ – 3. Historisches zum Funktionsbegriff – 4. Historisches zum Stetigkeitsbegriff                                                                                 |    |
| § 6. Zusammenhängende Räume. Gebiete in $\mathbb{C}$ . . . . .                                                                                                                                                                        | 31 |
| 1. Lokal-konstante Funktionen. Zusammenhangsbegriff – 2. Wege und Weg-zusammenhang – 3. Gebiete in $\mathbb{C}$ – 4. Zusammenhangskomponenten von Bereichen – 5. Rand und Randabstand                                                 |    |
| <i>Kapitel 1. Komplexe Differentialrechnung</i> . . . . .                                                                                                                                                                             | 36 |
| § 1. Komplex differenzierbare Funktionen . . . . .                                                                                                                                                                                    | 37 |
| 1. Komplexe Differenzierbarkeit – 2. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen – 3. Historisches zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen                                                                                  |    |

## X Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 2. Komplexe und reelle Differenzierbarkeit . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                   | 40 |
| 1. Charakterisierung komplex differenzierbarer Funktionen – 2. Ein hinreichendes Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit – 3. Beispiele zu den Cauchy-Riemannschen Gleichungen – 4.* Harmonische Funktionen                                                                                                           |    |
| § 3. Holomorphe Funktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 45 |
| 1. Differentiationsregeln – 2. Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{O}(D)$ – 3. Charakterisierung lokal-konstanter Funktionen – 4. Historisches zur Notation                                                                                                                                                              |    |
| § 4. Partielle Differentiation nach $x, y, z$ und $\bar{z}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 50 |
| 1. Die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_{\bar{z}}, f_z$ – 2. Beziehungen zwischen den Ableitungen $u_x, u_y, v_x, v_y, f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$ – 3. Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ – 4. Kalkül der Differentialoperatoren $\partial$ und $\bar{\partial}$ |    |
| <b>Kapitel 2. Holomorphie und Winkeltreue. Biholomorphe Abbildungen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                        | 57 |
| § 1. Holomorphe Funktionen und Winkeltreue . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                     | 58 |
| 1. Winkeltreue, Holomorphie und Antiholomorphie – 2. Winkel- und Orientierungstreue, Holomorphie – 3. Geometrische Deutung der Winkeltreue – 4. Zwei Beispiele – 5. Historisches zur Winkeltreue                                                                                                                         |    |
| § 2. Biholomorphe Abbildungen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 63 |
| 1. Komplexe $2 \times 2$ Matrizen und biholomorphe Abbildungen – 2. Die biholomorphe Cayleyabbildung $\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}$ , $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ – 3. Bemerkungen zur Cayleyabbildung – 4* Bijektive holomorphe Abbildungen von $\mathbb{H}$ und von $\mathbb{E}$ auf die geschlitzte Ebene |    |
| § 3. Automorphismen der oberen Halbebene und des Einheitskreises . . . . .                                                                                                                                                                                                                                               | 68 |
| 1. Automorphismen von $\mathbb{H}$ – 2. Automorphismen von $\mathbb{E}$ – 3. Die Schreibweise $\eta \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$ für Automorphismen von $\mathbb{E}$ – 4. Homogenität von $\mathbb{E}$ und $\mathbb{H}$                                                                                                       |    |
| <b>Kapitel 3. Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                     | 72 |
| § 1. Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 73 |
| 1. Gleichmäßige Konvergenz – 2. Lokal-gleichmäßige Konvergenz – 3. Kompakte Konvergenz – 4. Historisches zur gleichmäßigen Konvergenz – 5.* Kompakte und stetige Konvergenz                                                                                                                                              |    |
| § 2. Konvergenzkriterien . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 80 |
| 1. Cauchysches Konvergenzkriterium – 2. Weierstraßsches Majorantenkriterium                                                                                                                                                                                                                                              |    |
| § 3. Normal konvergente Reihen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 82 |
| 1. Normale Konvergenz – 2. Diskussion der normalen Konvergenz – 3. Historisches zur normalen Konvergenz                                                                                                                                                                                                                  |    |
| <b>Kapitel 4. Potenzreihen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 85 |
| § 1. Konvergenzkriterien . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 85 |
| 1. Abelsches Konvergenzlemma – 2. Konvergenzradius – 3. Formel von CAUCHY-HADAMARD – 4. Quotientenkriterium – 5. Historisches zu konvergenten Potenzreihen                                                                                                                                                               |    |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 2. Beispiele konvergenter Potenzreihen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                      | 90  |
| 1. Exponentialreihe und trigonometrische Reihen. Eulersche Formel –                                                                                                                                                                                                                     |     |
| 2. Logarithmische Reihe und Arcustangensreihe – 3. Binomische Reihe –                                                                                                                                                                                                                   |     |
| 4* Konvergenzverhalten auf dem Rand – 5* Abelscher Stetigkeitssatz                                                                                                                                                                                                                      |     |
| § 3. Holomorphie von Potenzreihen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                             | 96  |
| 1. Formale gliedweise Differentiation und Integration – 2. Holomorphie von Potenzreihen. Vertauschungssatz – 3. Historisches zur gliedweisen Differentiation von Reihen – 4. Beispiele holomorpher Funktionen                                                                           |     |
| § 4. Struktur der Algebra der konvergenten Potenzreihen . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 100 |
| 1. Ordnungsfunktion – 2. Einheitensatz – 3. Normalform konvergenter Potenzreihen – 4. Bestimmung aller Ideale                                                                                                                                                                           |     |
| <i>Kapitel 5. Elementar-transzendente Funktionen</i> . . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 104 |
| § 1. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                      | 104 |
| 1. Charakterisierung von $\exp z$ durch die Differentialgleichung – 2. Additionstheorem der Exponentialfunktion – 3. Bemerkungen zum Additionstheorem – 4. Additionstheoreme für $\cos z$ und $\sin z$ – 5. Historisches zu $\cos z$ und $\sin z$ – 6. Hyperbolische Funktionen         |     |
| § 2. Epimorphiesatz für $\exp z$ und Folgerungen . . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 109 |
| 1. Epimorphiesatz – 2. Die Gleichung $\text{Kern}(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z}$ – 3. Periodizität von $\exp z$ – 4. Wertevorrat, Nullstellen und Periodizität von $\cos z$ und $\sin z$ – 5. Cotangens- und Tangensfunktion. Arcustangensreihe – 6. Die Gleichung $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ |     |
| § 3. Polarkoordinaten, Einheitswurzeln und natürliche Grenzen . . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 115 |
| 1. Polarkoordinaten – 2. Einheitswurzeln – 3. Singuläre Punkte und natürliche Grenzen – 4. Historisches zu natürlichen Grenzen                                                                                                                                                          |     |
| § 4. Logarithmusfunktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 120 |
| 1. Definition und elementare Eigenschaften – 2. Existenz von Logarithmusfunktionen – 3. Die Eulersche Folge $(1 + z/n)^n$ – 4. Hauptzweig des Logarithmus – 5. Historisches zur Logarithmusfunktion im Komplexen                                                                        |     |
| § 5. Diskussion von Logarithmusfunktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 125 |
| 1. Zu den Identitäten $\log(wz) = \log w + \log z$ und $\log(\exp z) = z$ – 2. Logarithmus und Arcustangens – 3. Potenzfunktionen. Formel von NEWTON-ABEL – 4. Die Riemannsche $\zeta$ -Funktion                                                                                        |     |

## Teil B. Cauchysche Funktionentheorie

|                                                                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Kapitel 6. Komplexe Integralrechnung</i> . . . . .                                                                                                                               | 130 |
| § 0. Integration in reellen Intervallen . . . . .                                                                                                                                   | 131 |
| 1. Integralbegriff. Rechenregeln und Standardabschätzung – 2. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung                                                                |     |
| § 1. Wegintegrale in $\mathbb{C}$ . . . . .                                                                                                                                         | 133 |
| 1. Stetig und stückweise stetig differenzierbare Wege – 2. Integration längs Wegen – 3. Die Integrale $\int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta$ – 4. Historisches zur Integration im |     |

## XII Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Komplexen – 5. Unabhängigkeit von der Parametrisierung – 6. Zusammenhang mit reellen Kurvenintegralen                                                                                                                                                                                               |     |
| § 2. Eigenschaften komplexer Wegintegrale . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                 | 139 |
| 1. Rechenregeln – 2. Standardabschätzung – 3. Vertauschungssätze – 4. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$                                                                                                                                                    |     |
| § 3. Wegunabhängigkeit von Integralen. Stammfunktionen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 144 |
| 1. Stammfunktionen – 2. Bemerkungen über Stammfunktionen. Integrabilitätskriterium – 3. Integrabilitätskriterium für Sterngebiete                                                                                                                                                                   |     |
| <i>Kapitel 7. Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung</i> . . . . .                                                                                                                                                                                                                | 149 |
| § 1. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete . . . . .                                                                                                                                                                                                                                            | 149 |
| 1. Integrallemma von GOURSAT – 2. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete – 3. Historisches zum Integralsatz – 4. Historisches zum Integrallemma – 5.* Reeller Beweis des Integrallemmas – 6.* Die Fresnelschen Integrale – 7.* Das Integral $I(z) := \int_0^\infty t^{-1} (e^{-t} - e^{-tz}) dt$ |     |
| § 2. Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben . . . . .                                                                                                                                                                                                                                          | 158 |
| 1. Verschärfung des Cauchyschen Integralsatzes für Sterngebiete – 2. Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben – 3. Historisches zur Integralformel – 4.* Die Cauchysche Integralformel für reell stetig differenzierbare Funktionen – 5.* Schwarzsche Integralformel                             |     |
| § 3. Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                   | 163 |
| 1. Entwicklungssatz – 2. Entwicklungssatz von CAUCHY-TAYLOR – 3. Historisches zum Entwicklungssatz – 4. Riemannscher Fortsetzungssatz – 5. Historisches zum Riemannschen Fortsetzungssatz                                                                                                           |     |
| § 4. Diskussion des Entwicklungssatzes . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 169 |
| 1. Holomorphie und unendlich häufige komplexe Differenzierbarkeit – 2. Umbildungssatz – 3. Analytische Fortsetzung – 4. Produktsatz für Potenzreihen – 5. Bestimmung von Konvergenzradien                                                                                                           |     |
| § 5.* Spezielle Taylorreihen. Bernoullische Zahlen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                        | 173 |
| 1. Taylorreihe von $z(e^z - 1)^{-1}$ . Bernoullische Zahlen – 2. Taylorreihen von $z \cot z$ , $\tan z$ und $\frac{z}{\sin z}$ – 3. Potenzsummen und Bernoullische Zahlen – 4. Bernoullische Polynome                                                                                               |     |

## Teil C. Cauchy-Weierstraß-Riemannsche Funktionentheorie

|                                                                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Kapitel 8. Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen</i> . . . . .                                                                                                             | 178 |
| § 1. Identitätssatz . . . . .                                                                                                                                                       | 178 |
| 1. Identitätssatz – 2. Historisches zum Identitätssatz – 3. Diskretheit und Abzählbarkeit der $a$ -Stellen – 4. Nullstellenordnung und Vielfachheit – 5. Existenz singulärer Punkte |     |
| § 2. Der Holomorphiebegriff . . . . .                                                                                                                                               | 185 |
| 1. Holomorphie, lokale Integrabilität und konvergente Potenzreihen –                                                                                                                |     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                           |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2. Holomorphie von Integralen – 3. Holomorphie, Winkel- und Orientierungstreue (endgültige Fassung) – 4. Cauchyscher, Riemannscher und Weierstraßscher Standpunkt. Das Glaubensbekenntnis von WEIERSTRASS                                                                                 |            |
| <b>§ 3. Cauchysche Abschätzungen und Ungleichungen für Taylorkoeffizienten . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                  | <b>189</b> |
| 1. Cauchysche Abschätzungen für Ableitungen in Kreisscheiben – 2. Gutzmerische Formel. Maximumprinzip – 3. Ganze Funktionen. Satz von LIOUVILLE – 4. Historisches zu den Cauchyschen Ungleichungen und zum Satz von LIOUVILLE – 5.* Beweis der Cauchyschen Ungleichungen nach WEIERSTRASS |            |
| <b>§ 4. Konvergenzsätze von WEIERSTRASS . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                     | <b>195</b> |
| 1. Weierstraßscher Konvergenzsatz – 2. Differentiationssätze für Reihen. Weierstraßscher Doppelreihensatz – 3. Historisches zu den Konvergenzsätzen – 4.* Weitere Konvergenzsätze – 5.* Eine Bemerkung WEIERSTRASS' zur Holomorphie – 6.* Eine Konstruktion von WEIERSTRASS               |            |
| <b>§ 5. Offenheitssatz und Maximumprinzip . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                   | <b>201</b> |
| 1. Offenheitssatz – 2. Maximumprinzip – 3. Historisches zum Maximumprinzip – 4. Verschärfung des Weierstraßschen Konvergenzsatzes – 5. Satz von HURWITZ                                                                                                                                   |            |
| <b>Kapitel 9. Miscellanea . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>208</b> |
| <b>§ 1. Fundamentalsatz der Algebra . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                         | <b>208</b> |
| 1. Fundamentalsatz der Algebra – 2. Vier Beweise des Fundamentalsatzes – 3. Satz von GAUSS über die Lage der Nullstellen von Ableitungen                                                                                                                                                  |            |
| <b>§ 2. Schwarzsches Lemma und die Gruppen Aut <math>\mathbb{E}</math>, Aut <math>\mathbb{H}</math>. . . . .</b>                                                                                                                                                                          | <b>211</b> |
| 1. Schwarzsches Lemma – 2. Mittelpunktstreue Automorphismen von $\mathbb{E}$ . Die Gruppen Aut $\mathbb{E}$ und Aut $\mathbb{H}$ – 3. Fixpunkte von Automorphismen – 4. Historisches zum Schwarzschen Lemma – 5. Lemma von SCHWARZ-PICK – 6. Satz von STUDY                               |            |
| <b>§ 3. Holomorphe Logarithmen und holomorphe Wurzeln . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                       | <b>217</b> |
| 1. Logarithmische Ableitung. Existenzlemma – 2. Homologisch einfach zusammenhängende Bereiche. Existenz holomorpher Logarithmusfunktionen – 3. Holomorphe Wurzelfunktionen – 4. Die Gleichung $f(z) = f(c) \exp \int \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$ – 5. Die Kraft der Quadratwurzel  |            |
| <b>§ 4. Biholomorphe Abbildungen. Lokale Normalform . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                         | <b>221</b> |
| 1. Biholomorphiekriterium – 2. Lokale Injektivität und lokal-biholomorphe Abbildungen – 3. Lokale Normalform – 4. Geometrische Interpretation der lokalen Normalform – 5. Faktorisierung holomorpher Funktionen                                                                           |            |
| <b>§ 5. Allgemeine Cauchy-Theorie . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                           | <b>226</b> |
| 1. Die Indexfunktion $\text{ind}_\gamma(z)$ – 2. Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheorie – 3. Beweis von iii) $\Rightarrow$ ii) nach DIXON – 4. Nullhomologie. Charakterisierung homologisch einfach zusammenhängender Bereiche                                                       |            |
| <b>§ 6.* Asymptotische Potenzreihenentwicklungen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                            | <b>231</b> |
| 1. Definition und elementare Eigenschaften – 2. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz asymptotischer Entwicklungen – 3. Asymptotische Entwicklungen und Differentiation – 4. Satz von RITT – 5. Satz von E. BOREL                                                                  |            |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Kapitel 10. Isolierte Singularitäten. Meromorphe Funktionen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>239</b> |
| <b>§ 1. Isolierte Singularitäten . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>239</b> |
| 1. Hebbare Singularitäten. Pole – 2. Entwicklung von Funktionen um Polstellen – 3. Wesentliche Singularitäten. Satz von CASORATI und WEIERSTRASS – 4. Historisches zur Charakterisierung isolierter Singularitäten                                                                                                                       |            |
| <b>§ 2*. Automorphismen punktierter Bereiche . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>244</b> |
| 1. Isolierte Singularitäten holomorpher Injektionen – 2. Die Gruppen Aut $\mathbb{C}$ und Aut $\mathbb{C}^*$ – 3. Automorphismen punktierter beschränkter Bereiche – 4. Starre Gebiete                                                                                                                                                   |            |
| <b>§ 3. Meromorphe Funktionen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>248</b> |
| 1. Definition der Meromorphie – 2. Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{M}(D)$ der in $D$ meromorphen Funktionen – 3. Division von meromorphen Funktionen – 4. Die Ordnungsfunktion $o_c$                                                                                                                                                 |            |
| <b>Kapitel 11. Konvergente Reihen meromorpher Funktionen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>254</b> |
| <b>§ 1. Allgemeine Konvergenztheorie . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>254</b> |
| 1. Kompakte und normale Konvergenz – 2. Rechenregeln – 3. Beispiele                                                                                                                                                                                                                                                                      |            |
| <b>§ 2. Die Partialbruchentwicklung von <math>\pi \cot \pi z</math> . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>258</b> |
| 1. Cotangens und Verdopplungsformel. Die Identität $\pi \cot \pi z = \varepsilon_1(z)$ – 2. Historisches zur Cotangensreihe und zu ihrem Beweis – 3. Partialbruchreihen für $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ und $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ – 4.* Charakterisierung des Cotangens durch sein Additionstheorem bzw. seine Differentialgleichung |            |
| <b>§ 3. Die Eulerschen Formeln für <math>\sum_{v \geq 1} \frac{1}{v^{2n}}</math> . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                           | <b>262</b> |
| 1. Entwicklung von $\varepsilon_1(z)$ um 0 und Eulersche Formeln für $\zeta(2n)$ – 2. Historisches zu den Eulerschen $\zeta(2n)$ -Formeln – 3. Differentialgleichung für $\varepsilon_1$ und eine Identität für Bernoullische Zahlen – 4. Die Eisensteinreihen $\varepsilon_k(z) := \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+v)^k}$           |            |
| <b>§ 4*. EISENSTEIN-Theorie trigonometrischer Funktionen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>265</b> |
| 1. Additionstheorem – 2. Eisensteins Grundformeln – 3. Weitere Eisensteinische Formeln und die Identität $\varepsilon_1(z) = \pi \cot \pi z$ – 4. Skizze der Theorie der Kreisfunktionen nach EISENSTEIN                                                                                                                                 |            |
| <b>Kapitel 12. Laurentreihen und Fourierreihen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>272</b> |
| <b>§ 1. Holomorphe Funktionen in Kreisringen und Laurentreihen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>272</b> |
| 1. Cauchytheorie für Kreisringe – 2. Laurentdarstellung in Kreisringen – 3. Laurententwicklungen – 4. Beispiele – 5. Historisches zum Satz von LAURENT – 6.* Herleitung des Satzes von LAURENT aus dem Satz von CAUCHY-TAYLOR                                                                                                            |            |
| <b>§ 2. Eigenschaften von Laurentreihen . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>283</b> |
| 1. Konvergenzsatz und Identitätssatz – 2. Gutzmersche Formel und Cauchysche Ungleichungen – 3. Charakterisierung isolierter Singularitäten                                                                                                                                                                                               |            |

|                                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 3. Periodische holomorphe Funktionen und Fourierreihen . . . . .                                                                                                                                                                                     | 287 |
| 1. Streifengebiete und Kreisringe – 2. Periodische holomorphe Funktionen in Streifengebieten – 3. Fourierentwicklung in Streifengebieten – 4. Beispiele – 5. Historisches zu Fourierreihen                                                             |     |
| § 4. Die Thetafunktion . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 291 |
| 1. Konvergenzsatz – 2. Konstruktion doppelt-periodischer Funktionen – 3. Die Fourierreihe von $e^{-z^2\pi\tau} \vartheta(i\tau z, \tau)$ – 4. Transformationsformel der Thetafunktion – 5. Historisches zur Thetafunktion – 6. Über das Fehlerintegral |     |
| <br><i>Kapitel 13. Residuenkalkül</i> . . . . .                                                                                                                                                                                                        | 300 |
| § 1. Residuensatz . . . . .                                                                                                                                                                                                                            | 300 |
| 1. Einfach geschlossene Wege – 2. Das Residuum – 3. Beispiele – 4. Residuensatz – 5. Historisches zum Residuensatz                                                                                                                                     |     |
| § 2. Folgerungen aus dem Residuensatz . . . . .                                                                                                                                                                                                        | 308 |
| 1. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int F(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a} d\zeta$ – 2. Anzahlformel für Null- und Polstellen – 3. Satz von ROUCHE                                                                                                   |     |
| <br><i>Kapitel 14. Bestimmte Integrale und Residuenkalkül</i> . . . . .                                                                                                                                                                                | 314 |
| § 1. Berechnung von Integralen . . . . .                                                                                                                                                                                                               | 314 |
| 0. Uneigentliche Integrale – 1. Trigonometrische Integrale                                                                                                                                                                                             |     |
| $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ – 2. Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ – 3. Das Integral                                                                                                                |     |
| $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ für $m, n \in \mathbb{N}$ , $0 < m < n$                                                                                                                                                                     |     |
| § 2. Weitere Integralauswertungen . . . . .                                                                                                                                                                                                            | 319 |
| 1. Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} dx$ – 2. Uneigentliche Integrale                                                                                                                                                      |     |
| $\int_0^{\infty} q(x) x^{a-1} dx$ – 3. Die Integrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx$                                                                                                                                                         |     |
| § 3. Gaußsche Summen . . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 326 |
| 1. Abschätzung von $\frac{e^{uz}}{e^z - 1}$ für $0 \leq u \leq 1$ – 2. Berechnung der Gaußschen                                                                                                                                                        |     |
| Summen $G_n := \sum_0^{n-1} e^{\frac{2\pi i v^2}{n}}$ , $n \geq 1$ – 3. Direkter residuentheoretischer Beweis der                                                                                                                                      |     |
| Formel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ – 4. Fourierreihen der Bernoullischen Polynome                                                                                                                                               |     |
| <br><i>Kurzbiographien von ABEL, CAUCHY, EISENSTEIN, EULER, RIEMANN und WEIERSTRASS</i> . . . . .                                                                                                                                                      | 333 |
| <br><i>Photographie von Riemanns Grabplatte</i> . . . . .                                                                                                                                                                                              | 337 |

## XVI      Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                                                          |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| <i>Literatur</i> . . . . .                                                                                                                               | 338    |
| Klassische Literatur zur Funktionentheorie – Lehrbuchliteratur zur Funktionentheorie – Literatur zur Geschichte der Funktionentheorie und der Mathematik |        |
| <i>Symbolverzeichnis</i> . . . . .                                                                                                                       | 346    |
| <i>Namenverzeichnis</i> . . . . .                                                                                                                        | 347    |
| <i>Sachverzeichnis</i> . . . . .                                                                                                                         | 351    |
| <i>Porträts berühmter Mathematiker</i> . . . . .                                                                                                         | 2, 271 |