

Inhaltsverzeichnis

Teil I Gruppen

1	Halbgruppen	3
1.1	Definitionen	3
1.1.1	Ein Beispiel einer Halbgruppe	3
1.1.2	Eine Halbgruppe ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung	4
1.1.3	Verknüpfungstafel	5
1.1.4	Beispiele von Halbgruppen	6
1.2	Unterhalbgruppen	7
1.3	Invertierbare Elemente	7
1.3.1	Eigenschaften der Menge der invertierbaren Elemente	8
1.4	Allgemeines Assoziativ- und Kommutativgesetz	9
1.5	Potenzen und Vielfache	10
1.6	Homomorphismen, Isomorphismen	11
1.6.1	Definitionen und Beispiele	11
1.6.2	Produkte und Inverse von (bijektiven) Homomorphismen	13
1.7	Direkte Produkte	14
	Aufgaben	15
2	Gruppen	17
2.1	Eigenschaften und Beispiele von Gruppen	17
2.1.1	Definition einer Gruppe	18
2.1.2	Einfache Eigenschaften	18
2.1.3	Schwaches Axiomensystem	19
2.1.4	Beispiele	20
2.1.5	Nützliche Kriterien	22
2.2	Untergruppen	22
2.2.1	Untergruppennachweise	23
2.2.2	Endliche Untergruppen	24
2.2.3	Beispiele von Untergruppen	24

2.3	Homomorphismen.....	26
2.3.1	Kern und Bild eines Homomorphismus.....	27
2.3.2	Symmetrische Gruppen gleichmächtiger Mengen.....	28
2.3.3	Der Satz von Cayley	29
	Aufgaben	30
3	Untergruppen	33
3.1	Erzeugendensysteme. Elementordnungen.....	33
3.1.1	Durchschnitte von Untergruppen	34
3.1.2	Erzeugendensysteme	34
3.1.3	Darstellung von $\langle X \rangle$	35
3.1.4	Elementordnungen	37
3.1.5	Die Diedergruppen	38
3.2	Nebenklassen	40
3.2.1	Links- bzw. Rechtsnebenklassen liefern Partitionen	40
3.2.2	Der Index von U in G	42
3.3	Der Satz von Lagrange.....	43
3.3.1	Repräsentantensysteme	43
3.3.2	Der Satz von Lagrange	44
3.3.3	Der Untergruppenverband der S_3 *.....	44
3.3.4	Linksnebenklassen sind nicht unbedingt auch Rechtsnebenklassen *	45
3.3.5	Wichtige Folgerungen aus dem Satz von Lagrange	45
3.3.6	Eine Verallgemeinerung des Satzes von Lagrange *	46
	Aufgaben	47
4	Normalteiler und Faktorgruppen.....	49
4.1	Normalteiler	49
4.1.1	Definition und Beispiele	49
4.1.2	Weitere Beispielsklassen.....	50
4.1.3	Produkte von Untergruppen	52
4.2	Normalisatoren	52
4.3	Faktorgruppen	54
4.3.1	G modulo N	54
4.3.2	Der Satz von Cauchy für abelsche Gruppen *	55
4.3.3	Zwischenbilanz: $(G, \cdot)$ und $(G, +)$	56
4.3.4	Restklassen modulo n	57
4.4	Der Homomorphiesatz	59
4.5	Innere Automorphismen und das Zentrum einer Gruppe *	61
4.6	Isomorphiesätze	62
4.6.1	Der erste Isomorphiesatz.....	62
4.6.2	Der Korrespondenzsatz	63

4.6.3	Der zweite Isomorphiesatz.....	64
4.6.4	Das Lemma von Zassenhaus *	64
	Aufgaben	66
5	Zyklische Gruppen	69
5.1	Der Untergruppenverband zyklischer Gruppen	69
5.1.1	Untergruppen zyklischer Gruppen sind zyklisch	70
5.1.2	Der Untergruppenverband einer endlichen zyklischen Gruppe	70
5.2	Klassifikation der zyklischen Gruppen	71
5.3	Anwendungen in der Zahlentheorie	72
5.3.1	Der Hauptsatz über den größten gemeinsamen Teiler	72
5.3.2	Teilerfremdheit	73
5.3.3	Der euklidische Algorithmus	73
5.3.4	Der Fundamentalsatz der Arithmetik *	75
5.3.5	Die Euler'sche Funktion	76
5.3.6	Prime Restklassengruppen	78
5.4	Die Automorphismengruppen zyklischer Gruppen *	79
5.4.1	Automorphismengruppen endlicher zyklischer Gruppen	79
5.4.2	Automorphismengruppen unendlicher zyklischer Gruppen....	80
	Aufgaben	80
6	Direkte und semidirekte Produkte	83
6.1	Äußere direkte Produkte	83
6.2	Innere direkte Produkte	84
6.2.1	Definition und Beispiele	84
6.2.2	Eine Kennzeichnung innerer direkter Produkte.....	85
6.2.3	Zusammenhang zwischen inneren und äußeren direkten Produkten	86
6.3	Anwendung in der Zahlentheorie.....	88
6.3.1	Der chinesische Restsatz.....	88
6.3.2	Lösen von Systemen von Kongruenzgleichungen *	90
6.3.3	Produktdarstellung der primen Restklassengruppen.....	91
6.3.4	Wann ist das Produkt zyklischer Gruppen wieder zyklisch? ...	92
6.4	Semidirekte Produkte	96
6.4.1	Das interne semidirekte Produkt.....	96
6.4.2	Das externe semidirekte Produkt	97
6.4.3	Zur Konstruktion nichtabelscher Gruppen mithilfe des semidirekten Produkts	99
	Aufgaben	102

7	Gruppenoperationen	105
7.1	Bahnen und Stabilisatoren	105
7.1.1	Operationen	106
7.1.2	Bahnen von Operationen	108
7.1.3	Der Stabilisator	109
7.2	Der Fixpunktsatz	111
7.2.1	Die Anzahlformel	111
7.2.2	Fixpunkte	111
7.3	Die Klassengleichung	113
7.3.1	Die Konjugiertenklassen	113
7.3.2	p -Gruppen	114
	Aufgaben	115
8	Die Sätze von Sylow	117
8.1	Der erste Satz von Sylow	117
8.1.1	Die Sätze von Frobenius und Cauchy	118
8.1.2	Sylowgruppen	121
8.2	Der zweite Satz von Sylow	121
8.2.1	Sylowgruppen und ihre Konjugierten	122
8.2.2	Zur Anzahl der p -Sylowgruppen einer endlichen Gruppe	123
8.2.3	Sylowgruppen und direkte Produkte	124
8.3	Gruppen kleiner Ordnung	125
8.4	Einfache Gruppen	127
8.4.1	Abelsche endliche einfache Gruppen	127
8.4.2	Zur Existenz nichttrivialer Normalteiler	128
	Aufgaben	131
9	Symmetrische und alternierende Gruppen	133
9.1	Kanonische Zerlegung in Zyklen	133
9.1.1	Zyklen	133
9.1.2	Ein Repräsentantensystem von S_{n+1} modulo S_n	136
9.1.3	Zerlegung von Permutationen in Zyklen	136
9.2	Alternierende Gruppen	138
9.2.1	Das Signum ist ein Homomorphismus	138
9.2.2	Gerade und ungerade Permutationen	139
9.2.3	Erzeugendensysteme von A_n	140
9.3	Zur Einfachheit der alternierenden Gruppen	140
	Aufgaben	142

10 Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen 145

10.1 Der Hauptsatz 145

10.1.1 Zerlegung von p -Gruppen 145

10.1.2 Endliche abelsche Gruppen 147

10.2 Klassifikation der endlichen abelschen Gruppen 148

10.2.1 Der Typ einer endlichen abelschen Gruppe 148

10.2.2 Anzahlformel und Partitionen natürlicher Zahlen 148

10.3 Die zweite Version des Hauptsatzes * 150

10.3.1 Die zweite Fassung 150

10.3.2 Invariante Faktoren abelscher Gruppen 151

Aufgaben 151

11 Auflösbare Gruppen 153

11.1 Normalreihen und Kompositionsreihen 153

11.1.1 Normalreihen mit und ohne Wiederholungen 154

11.1.2 Der Verfeinerungssatz von Schreier * 155

11.1.3 Kompositionsreihen 156

11.1.4 Der Satz von Jordan-Hölder * 157

11.2 Kommutatorgruppen 158

11.2.1 Kommutatoren 158

11.2.2 Abelsche Faktorgruppen 159

11.2.3 Höhere Kommutatorgruppen 160

11.3 Auflösbare Gruppen 161

11.4 Untergruppen, Faktorgruppen und Produkte auflösbarer Gruppen 162

11.4.1 Auflösbarkeit und abelsche Normalreihen 162

11.4.2 Auflösbarkeit und Kompositionsreihen 163

11.5 Klassen auflösbarer Gruppen 164

Aufgaben 165

12 Freie Gruppen * 167

12.1 Existenz und Eindeutigkeit freier Gruppen 168

12.1.1 Definition freier Gruppen und erste Folgerungen 168

12.1.2 Die Konstruktion freier Gruppen 170

12.1.3 Die Eindeutigkeit freier Gruppen 175

12.1.4 Jede Gruppe ist homomorphes Bild einer freien Gruppe 177

12.2 Definierende Relationen 177

12.2.1 Die Gruppen $G_p \langle S \mid A \rangle$ 179

12.2.2 Ermittlung von $H = F/N$ 180

12.3 Beispiele 180

Aufgaben 182

Teil II Ringe

13 Grundbegriffe der Ringtheorie 187

 13.1 Definition und Beispiele 187

 13.1.1 Ringe, kommutative Ringe, Ringe mit Eins 188

 13.1.2 Beispiele von Ringen 188

 13.1.3 Rechenregeln 189

 13.2 Teilringe 190

 13.3 Die Einheitengruppe 191

 13.4 Homomorphismen 192

 13.5 Integritätsbereiche 194

 13.6 Charakteristik eines Ringes mit 1 195

 13.6.1 Die Charakteristik ist eine natürliche Zahl oder 0 195

 13.6.2 In einem Integritätsbereich ist die Frobeniusabbildung
 ein Monomorphismus 196

 13.7 Körper und Schiefkörper 197

 13.7.1 Beispiele von Körpern und Schiefkörpern 197

 13.7.2 Endliche (Schief-)Körper * 197

 13.8 Quotientenkörper 198

 13.8.1 Die Konstruktion des Quotientenkörpers $Q(R)$ 198

 13.8.2 Die Einbettung von R in $Q(R)$ 199

 13.8.3 Die universelle Eigenschaft 200

 Aufgaben 201

14 Polynomringe 205

 14.1 Motivation 206

 14.2 Konstruktion des Ringes $R[\mathbb{N}_0]$ 206

 14.2.1 Die Menge $R[\mathbb{N}_0]$ 206

 14.2.2 Die Addition und Multiplikation in $R[\mathbb{N}_0]$ 207

 14.2.3 Der Ring $(R[\mathbb{N}_0], +, \cdot)$ 207

 14.2.4 Die Einbettung von R in $R[\mathbb{N}_0]$ 208

 14.3 Polynome in einer Unbestimmten 208

 14.3.1 Polynome in der Unbestimmten X 209

 14.3.2 Die universelle Eigenschaft 210

 14.3.3 Der Grad eines Polynoms 211

 14.3.4 Anwendung des Grades 212

 14.3.5 Einsetzen in Polynome 213

 14.3.6 Der Körper der rationalen Funktionen 213

 14.3.7 Algebraische und transzendente Elemente 214

 14.3.8 Der Divisionsalgorithmus 215

 14.3.9 Nullstellen und Gleichheit von Polynomen 216

 14.3.10 Endliche Untergruppen von Einheitengruppen 217

14.4	Prime Restklassengruppen *	218
14.5	Polynome in mehreren Unbestimmten	220
14.5.1	Der Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$	220
14.5.2	Algebraische Unabhängigkeit	222
	Aufgaben	223
15	Ideale	225
15.1	Definitionen und Beispiele	225
15.1.1	Ideale, Linksideale, Rechtsideale	226
15.1.2	Homomorphismen und Ideale	226
15.2	Erzeugung von Idealen	227
15.2.1	Endlich erzeugte Ideale und Hauptideale	227
15.2.2	Darstellung von Idealen	228
15.3	Einfache Ringe	229
15.3.1	Einfache Ringe und Körper	229
15.3.2	Einfache Ringe und Schiefkörper	229
15.3.3	Einfache Ringe und Homomorphismen	230
15.4	Idealoperationen	230
15.4.1	Summe und Produkt von Idealen	230
15.4.2	Summe und Produkt von Hauptidealen	231
15.5	Faktorringe	232
15.6	Isomorphiesätze	233
15.7	Primideale	235
15.7.1	Primideale und Nullteilerfreiheit	235
15.7.2	Beispiele	235
15.8	Maximale Ideale	236
15.8.1	Faktorringe nach maximalen Idealen	236
15.8.2	Maximale Ideale sind Primideale	237
15.8.3	Existenz maximaler Ideale *	238
	Aufgaben	239
16	Teilbarkeit in Integritätsbereichen	243
16.1	Teilbarkeit	243
16.1.1	Teilbarkeitsregeln	244
16.1.2	Unzerlegbare Elemente und Primelemente	245
16.1.3	ggT und kgV	246
16.2	Idealtheoretische Interpretation	248
	Aufgaben	249

17 Faktorielle Ringe 251

17.1 Kennzeichnungen faktorieller Ringe 251

17.1.1 Definition faktorieller Ringe 251

17.1.2 Teilerkettenbedingung und Primbedingung 252

17.1.3 Darstellung der Elemente faktorieller Ringe * 253

17.1.4 Teilerfremdheit * 254

17.2 Der nichtfaktorielle Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ * 255

Aufgaben 257

18 Hauptidealringe. Euklidische Ringe 259

18.1 Hauptidealringe 259

18.1.1 Hauptidealringe sind faktoriell 260

18.1.2 Der Hauptsatz über den ggT 261

18.2 Euklidische Ringe 262

18.2.1 Der euklidische Algorithmus * 263

18.3 Der euklidische Ring $\mathbb{Z}[i]$ * 264

18.3.1 Der euklidische Betrag auf $\mathbb{Z}[i]$ 265

18.3.2 Zahlen als Summen von Quadraten 266

18.4 Weitere Ringe der Form $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ * 267

18.4.1 Die Normabbildung auf $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ und die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 268

18.4.2 Unzerlegbare Elemente, die nicht prim sind 268

18.4.3 Der euklidische Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 269

Aufgaben 270

19 Zerlegbarkeit in Polynomringen und noethersche Ringe 273

19.1 Der Satz von Gauß 273

19.1.1 Das Lemma von Gauß 274

19.1.2 Zerlegbarkeit in R , $R[X]$ und $K[X]$ 275

19.1.3 Polynomringe über faktoriellen Ringen sind faktoriell 277

19.2 Irreduzibilität 278

19.2.1 Lineare Teiler 278

19.2.2 Der Reduktionssatz 279

19.2.3 Das Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein 281

19.3 Noethersche Ringe * 286

19.3.1 Definitionen 286

19.3.2 Der Basissatz von Hilbert 287

19.3.3 Ein Überblick über die behandelten Ringe 288

Aufgaben 289

20 Das Quadratische Reziprozitätsgesetz *	293
20.1 Das Legendre-Symbol	294
20.1.1 Quadratische Reste und Nichtreste	294
20.1.2 Das Eulersche Kriterium	296
20.2 Der Beweis des Reziprozitätsgesetzes	299
20.2.1 Das Lemma von Gauß	299
20.3 Anwendungen des Quadratischen Reziprozitätsgesetzes	305
20.4 Das Jacobi-Symbol	307
Aufgaben	310

Teil III Körper

21 Grundlagen der Körpertheorie	315
21.1 Körpererweiterungen	315
21.1.1 Definition und Beispiele	315
21.1.2 Die Charakteristik eines Körpers	316
21.1.3 Teilkörper, Körpererweiterungen	317
21.1.4 Primkörper	317
21.1.5 Der Grad einer Körpererweiterung	318
21.1.6 Der Gradsatz	320
21.2 Ring- und Körperadjunktion	321
21.2.1 Einfache Körpererweiterungen	322
21.2.2 Darstellungen von $K[S]$ und $K(S)$	322
21.3 Algebraische Elemente. Minimalpolynome	323
21.3.1 Algebraische und transzendente Elemente	323
21.3.2 Das Minimalpolynom algebraischer Elemente	324
Aufgaben	325
22 Einfache und algebraische Körpererweiterungen	329
22.1 Einfache Körpererweiterungen	330
22.1.1 Darstellung von Elementen einfacher Erweiterungen als Linearkombination	332
22.2 Fortsetzung von Isomorphismen auf einfache Erweiterungen	332
22.2.1 Existenz und Eindeutigkeit einer Fortsetzung	333
22.2.2 K -Monomorphismen	334
22.3 Algebraische Körpererweiterungen	334
22.3.1 Endliche und algebraische Erweiterungen	335
22.3.2 Der algebraische Abschluss von K in L	335
22.3.3 Die Transitivität der Eigenschaft algebraisch	336
22.3.4 Zwischenringe algebraischer Erweiterungen sind Körper	337
22.3.5 K -Homomorphismen algebraischer Erweiterungen	337
22.3.6 Mächtigkeitsaussagen	337
Aufgaben	338

23 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal *	341
23.1 Konstruierbarkeit	341
23.1.1 Konstruktion von Punkten mit Zirkel und Lineal	342
23.1.2 Die Menge der konstruierbaren Punkte	343
23.1.3 Die Menge der aus S konstruierbaren Punkte $\mathcal{K}(S)$ ist ein Körper	344
23.1.4 Eine Kennzeichnung der konstruierbaren Elemente	346
23.1.5 Die Grade der konstruierbaren Elemente	348
23.2 Die drei klassischen Probleme	348
23.2.1 Verdopplung des Würfels	348
23.2.2 Winkeldreiteilung	348
23.2.3 Die Quadratur des Kreises	349
Aufgaben	350
24 Transzendente Körpererweiterungen *	351
24.1 Transzendenzbasen	351
24.1.1 Algebraisch unabhängige Elemente	352
24.1.2 Transzendenzbasis	352
24.1.3 Kennzeichnung einer Transzendenzbasis	353
24.2 Der Transzendenzgrad	355
Aufgaben	356
25 Algebraischer Abschluss. Zerfällungskörper	357
25.1 Der algebraische Abschluss eines Körpers	358
25.1.1 Der Satz von Kronecker	358
25.1.2 Algebraisch abgeschlossene Körper	359
25.1.3 Algebraischer Abschluss	360
25.1.4 Existenz eines algebraischen Abschlusses	361
25.1.5 Kennzeichnung mancher Koeffizienten eines Polynoms durch die Wurzeln des Polynoms	363
25.2 Zerfällungskörper	364
25.2.1 Einfache Tatsachen	364
25.2.2 Existenz von Zerfällungskörpern	365
25.2.3 Fortsetzung von Isomorphismen auf Zerfällungskörper	366
25.2.4 Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers und des algebraischen Abschlusses	367
25.2.5 Fortsetzung eines Monomorphismus auf eine algebraische Erweiterung	368

25.3	Normale Körpererweiterungen	369
25.3.1	Kennzeichnungen normaler Körpererweiterungen	369
25.3.2	Normale Hüllen	370
	Aufgaben	371
26	Separable Körpererweiterungen	375
26.1	Ableitung, Mehrfache Wurzeln	376
26.1.1	Ableitung	376
26.1.2	Mehrfache Wurzeln	376
26.2	Separabilität	378
26.2.1	Separable Polynome, Elemente und Körpererweiterungen	378
26.2.2	Separabilität und Charakteristik	378
26.2.3	Kennzeichnung separabler Elemente	379
26.2.4	Potenzen algebraischer Elemente	380
26.3	Vollkommene Körper	380
26.4	Der Satz vom primitiven Element	381
26.5	Der separable Abschluss	383
26.5.1	Der Zwischenkörper der separablen Elemente	383
26.5.2	Die Transitivität von <i>separabel</i>	385
26.5.3	K -Monomorphismen und der Separabilitätsgrad	385
26.5.4	Rein inseparable Körpererweiterungen *	386
	Aufgaben	387
27	Endliche Körper	391
27.1	Existenz und Eindeutigkeit	391
27.1.1	Eigenschaften endlicher Körper	392
27.1.2	Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz	392
27.2	Der Verband der Teilkörper	394
27.2.1	Erweiterungen endlicher Körper	395
27.3	Automorphismen	396
	Aufgaben	397
28	Die Galoiskorrespondenz	399
28.1	K -Automorphismen	400
28.1.1	Die Galoisgruppe von L/K	400
28.1.2	Der Fixkörper einer Gruppe von Automorphismen	401
28.1.3	Galoissche Körpererweiterung	402
28.1.4	Die Ordnung der Galoisgruppe	402
28.2	Die allgemeine Galoiskorrespondenz	403
28.2.1	Fixkörper und Fixgruppen	403
28.2.2	Die $+$ -Abbildungen	404

28.2.3	Abgeschlossene Zwischenkörper und Untergruppen	405
28.2.4	Das Kompositum von Teilkörpern *	406
28.2.5	Galoisgruppen isomorpher Körpererweiterungen	407
28.3	Algebraische Galoiserweiterungen	408
28.3.1	Normal plus separabel ist galoissch	408
28.3.2	Normalteiler und galoissche Zwischenkörper	409
28.4	Hauptsatz der endlichen Galoistheorie	410
28.4.1	Ein Satz von Dedekind	410
28.4.2	Der Hauptsatz	411
28.4.3	Zusammenfassung und Beispiel	412
28.5	Ergänzungen	413
28.5.1	Einbettung in eine Galoiserweiterung *	413
28.5.2	Der Translationssatz	414
28.5.3	Der Fundamentalsatz der Algebra *	414
28.5.4	Ein Überblick über die behandelten Körpererweiterungen	415
	Aufgaben	416
29	Der Zwischenkörperverband einer Galoiserweiterung *	419
29.1	Norm und Spur	420
29.2	Hinweise zur Ermittlung des Fixkörpers $\mathcal{F}(\Delta)$	421
29.2.1	Das Dedekind'sche Lemma	421
29.2.2	Die Methode mit der Spur	422
29.2.3	Die Methode mit dem Gleichungssystem	422
29.3	Hinweise zur Ermittlung von $\Gamma = \Gamma(L/K)$	423
29.3.1	Der Fall $L = K(a_1, \dots, a_k)$	423
29.3.2	Der Fall $L = K(a)$	423
29.4	Beispiele	423
29.5	Die Galoisgruppe eines Polynoms	425
29.5.1	Polynome mit zu S_n isomorpher Galoisgruppe	428
	Aufgaben	429
30	Kreisteilungskörper	433
30.1	Einheitswurzeln. Kreisteilungskörper	434
30.1.1	Die Gruppen der Einheitswurzeln	434
30.1.2	Primitive n -te Einheitswurzeln	435
30.1.3	Kreisteilungskörper	435
30.2	Kreisteilungspolynome	436
30.2.1	$X^n - 1$ ist Produkt von Kreisteilungspolynomen	436
30.2.2	Rekursive Berechnung der Kreisteilungspolynome	438
30.2.3	Kreisteilungspolynome sind irreduzibel über $\mathbb{Q}$	439
30.2.4	Der Satz von Wedderburn *	440

30.3	Die Galoisgruppe von K_n/K	441
30.3.1	Wann ist K_n/K galoissch?.....	441
30.3.2	Kreisteilungskörper über endlichen Körpern *	443
30.4	Konstruktion regulärer Vielecke *	443
30.4.1	Fermatsche Primzahlen	444
30.4.2	Kennzeichnungen der Konstruierbarkeit regulärer Vielecke ...	444
30.4.3	Die Konstruktion des regulären 17-Ecks	445
30.5	Ein kurzer Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetz *	447
	Aufgaben	449
31	Auflösung algebraischer Gleichungen durch Radikale	451
31.1	Zyklische Körpererweiterungen	452
31.1.1	Kennzeichnung zyklischer Erweiterungen	452
31.1.2	Eine hinreichende Bedingung	452
31.1.3	Reine Polynome	453
31.1.4	Eine notwendige Bedingung	454
31.1.5	Hilberts Satz 90 *	454
31.1.6	Zyklische Erweiterungen vom Primzahlgrad *	455
31.2	Auflösbarkeit	456
31.2.1	Radikalerweiterungen	457
31.3	Das Auflösbarkeitskriterium	457
31.3.1	Eine hinreichende Bedingung	457
31.3.2	Zwei Hilfssätze	458
31.3.3	Eine notwendige Bedingung	459
	Aufgaben	461
32	Die allgemeine Gleichung	463
32.1	Symmetrische Funktionen	464
32.1.1	Der Körper der symmetrischen Funktionen	464
32.1.2	Die elementarsymmetrischen Funktionen	464
32.1.3	Der Hauptsatz über symmetrische Funktionen	466
32.2	Das allgemeine Polynom	466
32.2.1	Motivation	466
32.2.2	Das allgemeine Polynom vom Grad n	467
32.2.3	Die Galoisgruppe des allgemeinen Polynoms	468
32.2.4	Der Satz von Ruffini-Abel	468
32.3	Die Diskriminante eines Polynoms *	469
32.3.1	Die Diskriminante liegt in K	469
32.3.2	Die Wurzel der Diskriminante	470

32.4 Die allgemeine Gleichung vom Grad 3 * 471

 32.4.1 Reduktion auf spezielle kubische Polynome..... 471

 32.4.2 Cardanosche Formeln 473

 32.4.3 Der klassische Fall 474

32.5 Die allgemeine Gleichung vom Grad 4 * 474

Aufgaben 476

Teil IV Moduln

33 Moduln * 479

 33.1 Links- und Rechtsmoduln..... 479

 33.2 Untermoduln 482

 33.3 Direkte Produkte und direkte Summen von Moduln 483

 33.4 Faktormoduln..... 484

 33.5 Freie Moduln 488

 33.6 Moduln über Hauptidealringen 492

 Aufgaben 500

A Hilfsmittel 503

Literaturverzeichnis 511

Stichwortverzeichnis 513