

Inhalt

Einleitung	5
1 L.E.J. Brouwer – die Infragestellung des <i>tertium non datur</i> in der Mathematik	13
1.1 Die Entwicklung des Brouwerschen Denkens hin zur Infragestellung des <i>tertium non datur</i>	14
1.1.1 Die Beurteilung des <i>tertium non datur</i> in Brouwers Dissertation	15
1.1.1.1 Brouwers frühe Auffassung der Negation	15
1.1.1.2 Brouwers Konstruktionsrealismus	16
1.1.1.3 Kritik an „Hilberts Dogma“	17
1.1.1.4 Ungültigkeit des <i>tertium non datur</i> außerhalb der Mathematik	19
1.1.2 Ein formales System zur Rekonstruktion der früh-intuitionistischen Logik	19
1.1.3 Entstehung, Entwicklung und Ende des Begriffs des Abzählbar-Unfertigen	25
1.1.4 Die Einsicht in die Unentscheidbarkeit gewisser mathematischer Probleme	29
1.1.5 Brouwers historische und philosophische Begründung seiner Kritik	35
1.1.6 Schwache Gegenbeispiele	37
1.1.7 Oskar Beckers Rekonstruktion der Brouwerschen Kritik am <i>tertium non datur</i>	41
1.2 Brouwer und das Aktual-Unendliche	44
2 Der Grundlagenstreit	47
2.1 Hermann Weyls Einstieg in die Grundlagendebatte	48
2.2 Die Entwicklung der Hilbertschen formalistischen Position hin zu einer Rechtfertigungstheorie	54
2.3 Kritik am Hilbertprogramm	57
2.3.1 Oskar Beckers <i>Mathematische Existenz</i>	58
2.3.2 Felix Kaufmanns Ausschaltung des Unendlichen in der Mathematik	60
2.3.3 Becker und Kaufmann über transfinite Ordinalzahlen	66

2.4	Hilberts beweistheoretischer Rechtfertigungsversuch infiniter Methoden	70
2.5	Das Unendliche als Idee im Sinne Kants	73
2.6	Welchen Wert hat die Beweistheorie im Rahmen der vorliegenden Arbeit (nicht)?	74
3	Paul Lorenzen – Rechtfertigung vom operativen Standpunkt	77
3.1	Zur Entwicklung der mathematikphilosophischen Position Paul Lorenzens	78
3.2	Die Rechtfertigung des <i>tertium non datur</i> für definite Bereiche	81
3.2.1	Was bedeutet „Definitheit“ bei Lorenzen?	81
3.2.2	Definitheit und Determiniertheit	87
3.2.3	Die Einbettungen klassischer in intuitionistische Kalküle durch Gödel und Gentzen	89
3.2.4	Rechtfertigung des <i>tertium non datur</i> für eigentliche Kalküle	92
3.2.5	Rechtfertigung des <i>tertium non datur</i> für eine elementare Sprache der Analysis	95
4	Bestimmung einer vermittelnden Position bezüglich mathematischer Wahrheit bzw. Gültigkeit	99
4.1	Die Freiheit des Mathematikers – ein Dialog	102
4.2	Zugangstheoretische Überlegungen zu mathematischer Wahrheit bzw. Gültigkeit	107
4.2.1	Konstruktionsrealismus	108
4.2.2	Der axiomatisch-deduktive Standpunkt	110
4.2.3	Ein Komplexitätsargument zugunsten des Für-wahr-Haltens unentschiedener Allaussagen	111
4.2.4	Unwiderlegbarkeit einer Allaussage innerhalb eines deduktiven Rahmens	113
4.2.5	Präzisierung der Kritik Brouwers	114
4.2.6	Rechtfertigung der klassischen Logik für die Mathematik	117
4.2.7	Eine Bemerkung zum konstruktionsrealistischen Gültigkeitsbegriff aus modelltheoretischer Sicht	119
4.3	Der Geltungsstatus mathematischer Sätze und Systeme aus zugangstheoretischer Sicht	121
4.3.1	Die Horizonte der mathematischen Gültigkeit	122
4.3.2	Hilberts Lösbarkeitsaxiom	124
4.3.3	Kants „Idee eines vollständigen Inbegriffs des Möglichen“	127
4.3.4	Begründung des konstruktionsrealistischen Gültigkeitsbegriffs	130
4.4	Die Idee alles jemals Beweisbaren – ein Gedankenspiel	134

5	Das Kontinuum	139
5.1	Reelle Zahlen aus zugangstheoretischer Sicht	140
5.2	Die Existenz nicht-messbarer Mengen, das Banach-Tarski-Paradox ..	144
5.3	Die Menge der reellen Zahlen aus Sicht der klassischen Mathematik	147
5.3.1	Fortsetzung des Gedankenspiels: die Gesamtheit aller reellen Zahlen	148
5.3.2	Sind alle reellen Zahlen bzgl. Anwendung des Auswahlaxioms gleich zu behandeln?	151
5.4	Statische vs. dynamische Auffassung – Philosophische Reflexionen zum Kontinuum	154
5.5	Intuitionismus: Die mathematische Erfassung des dynamischen Kontinuums	156
5.5.1	Das Stetigkeitsprinzip für Wahlfolgen	158
5.5.2	Der Brouwersche Stetigkeitssatz: „Jede volle Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ist stetig.“	160
5.6	Zur Gültigkeit mathematischer Prinzipien diesseits des Horizonts	162
5.6.1	Potenzmengen unendlicher Mengen	163
5.6.2	Das Auswahlaxiom auf \mathbb{R}	165
5.6.3	Die Bildung des Supremums – imprädikative Definitionen – Vollständigkeit	166
5.7	Zur Gültigkeit mathematischer und logischer Prinzipien jenseits des Horizonts	171
5.8	Auflösung des Banach-Tarski-Paradoxons	173
5.9	Ist aus zugangstheoretischer Sicht eine Revision der Mathematik zu fordern?	174
	Anhang/Ausblick	177
	Anhang 1: Ist für jede auf dem Kontinuum definierte Funktion ihre Einschränkung auf den jenseitigen Bereich stetig?	178
	Anhang 2: Einige Gedanken zu einer leichten Revision der Maßtheorie und des Potenzmengenaxioms durch Formalisierung des Horizontbegriffs	181
	Anhang 3: Ist der Begriff der Potenzmenge zu vage, um eine Entscheidung der Kontinuumshypothese zuzulassen?	183
	Zusammenfassung	186
	Literatur	188