

Aslak Tveito Ragnar Winther

---

# Einführung in partielle Differentialgleichungen

Ein numerischer Zugang

Übersetzt von Hanna Peywand Kiani



Springer

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Das Problemfeld</b>	<b>1</b>
1.1	Was ist eine Differentialgleichung? . . . . .	1
1.1.1	Konzepte . . . . .	2
1.2	Die Lösung und ihre Eigenschaften . . . . .	4
1.2.1	Eine gewöhnliche Differentialgleichung . . . . .	4
1.3	Eine numerische Methode . . . . .	7
1.4	Cauchy Problem . . . . .	10
1.4.1	Homogene Gleichungen erster Ordnung . . . . .	10
1.4.2	Inhomogene Gleichungen erster Ordnung . . . . .	13
1.4.3	Die Wellengleichung . . . . .	15
1.4.4	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	17
1.5	Übungsaufgaben . . . . .	20
1.6	Projekte . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Zweipunkt–Randwertaufgaben</b>	<b>39</b>
2.1	Die Poisson Gleichung in einer Raumdimension . . . . .	40
2.1.1	Die Greensche Funktion . . . . .	42
2.1.2	Glattheitseigenschaften der Lösung . . . . .	43
2.1.3	Ein Maximumprinzip . . . . .	44
2.2	Eine Finite Differenzenapproximation . . . . .	46
2.2.1	Taylor Reihen . . . . .	46
2.2.2	Ein System algebraischer Gleichungen . . . . .	47
2.2.3	Das Gaußsche Eliminationsverfahren für tridiagonale lineare Systeme . . . . .	50
2.2.4	Diagonal dominante Matrizen . . . . .	53
2.2.5	Positiv definite Matrizen . . . . .	55
2.3	Kontinuierliche und diskrete Lösungen . . . . .	56
2.3.1	Differenzen– und Differentialgleichungen . . . . .	57
2.3.2	Symmetrie . . . . .	58
2.3.3	Eindeutigkeit . . . . .	61
2.3.4	Ein Maximumprinzip für das diskrete Problem . . . . .	61
2.3.5	Konvergenz der diskreten Lösungen . . . . .	63
2.4	Eigenwertprobleme . . . . .	65
2.4.1	Das kontinuierliche Eigenwertproblem . . . . .	65

2.4.2 Das diskrete Eigenwertproblem . . . . .	68
2.5 Übungsaufgaben . . . . .	71
2.6 Projekte . . . . .	82
<b>3 Die Wärmeleitungsgleichung</b>	<b>87</b>
3.1 Ein kurzer Überblick . . . . .	87
3.2 Trennung der Veränderlichen . . . . .	90
3.3 Das Superpositionsprinzip . . . . .	92
3.4 Fourierkoeffizienten . . . . .	95
3.5 Andere Randbedingungen . . . . .	97
3.6 Das Neumann Problem . . . . .	98
3.6.1 Das Eigenwert–Problem . . . . .	99
3.6.2 Partikuläre Lösungen . . . . .	100
3.6.3 Eine formale Lösung . . . . .	100
3.7 Energieargumente . . . . .	102
3.8 Differentiation von Integralen . . . . .	106
3.9 Übungsaufgaben . . . . .	107
3.10 Projekte . . . . .	113
<b>4 Finite Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung</b>	<b>117</b>
4.1 Ein explizites Schema . . . . .	119
4.2 Fourieranalyse der numerischen Näherung . . . . .	122
4.2.1 Partikuläre Lösungen . . . . .	123
4.2.2 Vergleich der analytischen und diskreten Lösung . . . . .	127
4.2.3 Stabilitätsbetrachtungen . . . . .	129
4.2.4 Die Genauigkeit der Approximation . . . . .	130
4.2.5 Zusammenfassung des Vergleiches . . . . .	131
4.3 Von Neumannsche Stabilitätsanalyse . . . . .	132
4.3.1 Kontinuierliche und diskrete spezielle Lösungen . . . . .	132
4.3.2 Beispiele . . . . .	134
4.3.3 Ein nichtlineares Problem . . . . .	136
4.4 Ein implizites Schema . . . . .	139
4.4.1 Stabilitätsanalyse . . . . .	143
4.5 Energieargumente und numerische Stabilität . . . . .	145
4.6 Übungsaufgaben . . . . .	147
<b>5 Die Wellengleichung</b>	<b>159</b>
5.1 Trennung der Veränderlichen . . . . .	160
5.2 Eindeutigkeit und Energieargumente . . . . .	162
5.3 Eine finite Differenzenapproximation . . . . .	165
5.3.1 Stabilitätsanalyse . . . . .	167
5.4 Übungsaufgaben . . . . .	170

<b>6 Maximumprinzipien</b>	<b>175</b>
6.1 Eine Zweipunkt-Randwertaufgabe	175
6.2 Die lineare Wärmeleitungsgleichung	178
6.2.1 Der kontinuierliche Fall	180
6.2.2 Eindeutigkeit und Stabilität	183
6.2.3 Das explizite finite Differenzenschema	183
6.2.4 Das implizite finite Differenzenschema	186
6.3 Die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung	187
6.3.1 Der kontinuierliche Fall	188
6.3.2 Ein explizites finites Differenzenschema	189
6.4 Harmonische Funktionen	191
6.4.1 Maximumprinzipien für harmonische Funktionen	193
6.5 Diskrete harmonische Funktionen	195
6.6 Übungsaufgaben	200
<b>7 Die Poisson-Gleichung im Zweidimensionalen Raum</b>	<b>207</b>
7.1 Rechteckige Gebiete	207
7.2 Polarkoordinaten	210
7.2.1 Die Kreisscheibe	211
7.2.2 Ein Kreissektor	214
7.2.3 Eine Singularität	215
7.3 Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes	215
7.4 Die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen	220
7.5 Eine finite Differenzenapproximation	223
7.5.1 Der Fünf-Punkte-Differenzenstern	223
7.5.2 Eine Fehlerschranke	226
7.6 Gaußsche Elimination für allgemeine Systeme	228
7.6.1 Obere Dreiecksmatrizen	228
7.6.2 Allgemeine Systeme	229
7.6.3 Bandsysteme	231
7.6.4 Positiv definite Systeme	233
7.7 Übungsaufgaben	235
<b>8 Orthogonalität und allgemeine Fourierreihen</b>	<b>243</b>
8.1 Die volle Fourierreihe	244
8.1.1 Gerade und ungerade Funktionen	247
8.1.2 Differentiation von Fourierreihen	251
8.1.3 Die komplexe Darstellung	253
8.1.4 Skalierung	254
8.2 Randwertaufgaben und orthogonale Funktionen	255
8.2.1 Andere Randbedingungstypen	255
8.2.2 Sturm-Liouville Probleme	259
8.3 Der Abstand im quadratischen Mittel	262
8.4 Allgemeine Fourierreihen	265
8.5 Eine Poincaré Ungleichung	271
8.6 Übungsaufgaben	274

<b>9 Konvergenz von Fourierreihen</b>	<b>285</b>
9.1 Verschiedene Definitionen der Konvergenz . . . . .	285
9.2 Punktweise Konvergenz . . . . .	290
9.3 Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	296
9.4 Konvergenz im quadratischen Mittel . . . . .	300
9.5 Glattheit und Abklingverhalten der Fourierkoeffizienten . . . . .	302
9.6 Übungsaufgaben . . . . .	307
<b>10 Noch einmal die Wärmeleitungsgleichung</b>	<b>315</b>
10.1 Kompatibilitätsbedingungen . . . . .	315
10.2 Eine mathematische Rechtfertigung der Fourier-Methode . . . . .	321
10.2.1 Die Glättungseigenschaft der Gleichung . . . . .	321
10.2.2 Die Differentialgleichung . . . . .	323
10.2.3 Die Anfangsdaten . . . . .	325
10.2.4 Glatte und Kompatible Anfangsdaten . . . . .	327
10.3 Konvergenz von finiten Differenzenapproximationen . . . . .	329
10.4 Übungsaufgaben . . . . .	333
<b>11 Reaktions-Diffusionsgleichungen</b>	<b>339</b>
11.1 Das logistische Modell des Bevölkerungswachstums . . . . .	339
11.1.1 Ein numerisches Verfahren für die logistische Gleichung .	341
11.2 Die Gleichung von Fisher . . . . .	343
11.3 Ein finites Differenzenschema für die Gleichung von Fisher . . . . .	344
11.4 Ein invarianter Bereich . . . . .	345
11.5 Die asymptotische Lösung . . . . .	348
11.6 Energieargumente . . . . .	351
11.6.1 Ein invarianter Bereich . . . . .	352
11.6.2 Konvergenz gegen den Gleichgewichtszustand . . . . .	353
11.6.3 Abklingen der Ableitungen . . . . .	354
11.7 Explosion der Lösung . . . . .	356
11.8 Übungsaufgaben . . . . .	359
11.9 Projekte . . . . .	362
<b>12 Anwendungen der Fouriertransformation</b>	<b>367</b>
12.1 Die Fouriertransformation . . . . .	368
12.2 Eigenschaften der Fouriertransformation . . . . .	370
12.3 Die inverse Fouriertransformation . . . . .	374
12.4 Die Faltung . . . . .	377
12.5 Partielle Differentialgleichungen . . . . .	379
12.5.1 Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	379
12.5.2 Die Laplace-Gleichung in der Halbebene . . . . .	382
12.6 Übungsaufgaben . . . . .	384
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>387</b>
<b>Index</b>	<b>389</b>