

Aslak Tveito    Ragnar Winther

---

# Einführung in partielle Differentialgleichungen

Ein numerischer Zugang

Übersetzt von Hanna Peywand Kiani



Springer

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Das Problemfeld</b>	<b>1</b>
1.1	Was ist eine Differentialgleichung? . . . . .	1
1.1.1	Konzepte . . . . .	2
1.2	Die Lösung und ihre Eigenschaften . . . . .	4
1.2.1	Eine gewöhnliche Differentialgleichung . . . . .	4
1.3	Eine numerische Methode . . . . .	7
1.4	Cauchy Problem . . . . .	10
1.4.1	Homogene Gleichungen erster Ordnung . . . . .	10
1.4.2	Inhomogene Gleichungen erster Ordnung . . . . .	13
1.4.3	Die Wellengleichung . . . . .	15
1.4.4	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	17
1.5	Übungsaufgaben . . . . .	20
1.6	Projekte . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Zweipunkt–Randwertaufgaben</b>	<b>39</b>
2.1	Die Poisson Gleichung in einer Raumdimension . . . . .	40
2.1.1	Die Greensche Funktion . . . . .	42
2.1.2	Glattheitseigenschaften der Lösung . . . . .	43
2.1.3	Ein Maximumprinzip . . . . .	44
2.2	Eine Finite Differenzenapproximation . . . . .	46
2.2.1	Taylor Reihen . . . . .	46
2.2.2	Ein System algebraischer Gleichungen . . . . .	47
2.2.3	Das Gaußsche Eliminationsverfahren für tridiagonale lineare Systeme . . . . .	50
2.2.4	Diagonal dominante Matrizen . . . . .	53
2.2.5	Positiv definite Matrizen . . . . .	55
2.3	Kontinuierliche und diskrete Lösungen . . . . .	56
2.3.1	Differenzen– und Differentialgleichungen . . . . .	57
2.3.2	Symmetrie . . . . .	58
2.3.3	Eindeutigkeit . . . . .	61
2.3.4	Ein Maximumprinzip für das diskrete Problem . . . . .	61
2.3.5	Konvergenz der diskreten Lösungen . . . . .	63
2.4	Eigenwertprobleme . . . . .	65
2.4.1	Das kontinuierliche Eigenwertproblem . . . . .	65

2.4.2	Das diskrete Eigenwertproblem . . . . .	68
2.5	Übungsaufgaben . . . . .	71
2.6	Projekte . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Die Wärmeleitungsgleichung</b>	<b>87</b>
3.1	Ein kurzer Überblick . . . . .	87
3.2	Trennung der Veränderlichen . . . . .	90
3.3	Das Superpositionsprinzip . . . . .	92
3.4	Fourierkoeffizienten . . . . .	95
3.5	Andere Randbedingungen . . . . .	97
3.6	Das Neumann Problem . . . . .	98
3.6.1	Das Eigenwert-Problem . . . . .	99
3.6.2	Partikuläre Lösungen . . . . .	100
3.6.3	Eine formale Lösung . . . . .	100
3.7	Energieargumente . . . . .	102
3.8	Differentiation von Integralen . . . . .	106
3.9	Übungsaufgaben . . . . .	107
3.10	Projekte . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Finite Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung</b>	<b>117</b>
4.1	Ein explizites Schema . . . . .	119
4.2	Fourieranalyse der numerischen Näherung . . . . .	122
4.2.1	Partikuläre Lösungen . . . . .	123
4.2.2	Vergleich der analytischen und diskreten Lösung . . . . .	127
4.2.3	Stabilitätsbetrachtungen . . . . .	129
4.2.4	Die Genauigkeit der Approximation . . . . .	130
4.2.5	Zusammenfassung des Vergleiches . . . . .	131
4.3	Von Neumannsche Stabilitätsanalyse . . . . .	132
4.3.1	Kontinuierliche und diskrete spezielle Lösungen . . . . .	132
4.3.2	Beispiele . . . . .	134
4.3.3	Ein nichtlineares Problem . . . . .	136
4.4	Ein implizites Schema . . . . .	139
4.4.1	Stabilitätsanalyse . . . . .	143
4.5	Energieargumente und numerische Stabilität . . . . .	145
4.6	Übungsaufgaben . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Die Wellengleichung</b>	<b>159</b>
5.1	Trennung der Veränderlichen . . . . .	160
5.2	Eindeutigkeit und Energieargumente . . . . .	162
5.3	Eine finite Differenzenapproximation . . . . .	165
5.3.1	Stabilitätsanalyse . . . . .	167
5.4	Übungsaufgaben . . . . .	170

<b>6</b>	<b>Maximumprinzipien</b>	<b>175</b>
6.1	Eine Zweipunkt-Randwertaufgabe . . . . .	175
6.2	Die lineare Wärmeleitungsgleichung . . . . .	178
6.2.1	Der kontinuierliche Fall . . . . .	180
6.2.2	Eindeutigkeit und Stabilität . . . . .	183
6.2.3	Das explizite finite Differenzenschema . . . . .	183
6.2.4	Das implizite finite Differenzenschema . . . . .	186
6.3	Die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung . . . . .	187
6.3.1	Der kontinuierliche Fall . . . . .	188
6.3.2	Ein explizites finites Differenzenschema . . . . .	189
6.4	Harmonische Funktionen . . . . .	191
6.4.1	Maximumprinzipien für harmonische Funktionen . . . . .	193
6.5	Diskrete harmonische Funktionen . . . . .	195
6.6	Übungsaufgaben . . . . .	200
<b>7</b>	<b>Die Poisson-Gleichung im Zweidimensionalen Raum</b>	<b>207</b>
7.1	Rechteckige Gebiete . . . . .	207
7.2	Polarkoordinaten . . . . .	210
7.2.1	Die Kreisscheibe . . . . .	211
7.2.2	Ein Kreissektor . . . . .	214
7.2.3	Eine Singularität . . . . .	215
7.3	Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes . . . . .	215
7.4	Die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen . . . . .	220
7.5	Eine finite Differenzenapproximation . . . . .	223
7.5.1	Der Fünf-Punkte-Differenzenstern . . . . .	223
7.5.2	Eine Fehlerschranke . . . . .	226
7.6	Gaußsche Elimination für allgemeine Systeme . . . . .	228
7.6.1	Obere Dreiecksmatrizen . . . . .	228
7.6.2	Allgemeine Systeme . . . . .	229
7.6.3	Bandsysteme . . . . .	231
7.6.4	Positiv definite Systeme . . . . .	233
7.7	Übungsaufgaben . . . . .	235
<b>8</b>	<b>Orthogonalität und allgemeine Fourierreihen</b>	<b>243</b>
8.1	Die volle Fourierreihe . . . . .	244
8.1.1	Gerade und ungerade Funktionen . . . . .	247
8.1.2	Differentiation von Fourierreihen . . . . .	251
8.1.3	Die komplexe Darstellung . . . . .	253
8.1.4	Skalierung . . . . .	254
8.2	Randwertaufgaben und orthogonale Funktionen . . . . .	255
8.2.1	Andere Randbedingungstypen . . . . .	255
8.2.2	Sturm-Liouville Probleme . . . . .	259
8.3	Der Abstand im quadratischen Mittel . . . . .	262
8.4	Allgemeine Fourierreihen . . . . .	265
8.5	Eine Poincaré Ungleichung . . . . .	271
8.6	Übungsaufgaben . . . . .	274

<b>9 Konvergenz von Fourierreihen</b>	<b>285</b>
9.1 Verschiedene Definitionen der Konvergenz . . . . .	285
9.2 Punktweise Konvergenz . . . . .	290
9.3 Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	296
9.4 Konvergenz im quadratischen Mittel . . . . .	300
9.5 Glattheit und Abklingverhalten der Fourierkoeffizienten . . . . .	302
9.6 Übungsaufgaben . . . . .	307
<b>10 Noch einmal die Wärmeleitungsgleichung</b>	<b>315</b>
10.1 Kompatibilitätsbedingungen . . . . .	315
10.2 Eine mathematische Rechtfertigung der Fourier-Methode . . . .	321
10.2.1 Die Glättungseigenschaft der Gleichung . . . . .	321
10.2.2 Die Differentialgleichung . . . . .	323
10.2.3 Die Anfangsdaten . . . . .	325
10.2.4 Glatte und Kompatible Anfangsdaten . . . . .	327
10.3 Konvergenz von finiten Differenzenapproximationen . . . . .	329
10.4 Übungsaufgaben . . . . .	333
<b>11 Reaktions-Diffusionsgleichungen</b>	<b>339</b>
11.1 Das logistische Modell des Bevölkerungswachstums . . . . .	339
11.1.1 Ein numerisches Verfahren für die logistische Gleichung .	341
11.2 Die Gleichung von Fisher . . . . .	343
11.3 Ein finites Differenzenschema für die Gleichung von Fisher . . . . .	344
11.4 Ein invarianter Bereich . . . . .	345
11.5 Die asymptotische Lösung . . . . .	348
11.6 Energieargumente . . . . .	351
11.6.1 Ein invarianter Bereich . . . . .	352
11.6.2 Konvergenz gegen den Gleichgewichtszustand . . . . .	353
11.6.3 Abklingen der Ableitungen . . . . .	354
11.7 Explosion der Lösung . . . . .	356
11.8 Übungsaufgaben . . . . .	359
11.9 Projekte . . . . .	362
<b>12 Anwendungen der Fouriertransformation</b>	<b>367</b>
12.1 Die Fouriertransformation . . . . .	368
12.2 Eigenschaften der Fouriertransformation . . . . .	370
12.3 Die inverse Fouriertransformation . . . . .	374
12.4 Die Faltung . . . . .	377
12.5 Partielle Differentialgleichungen . . . . .	379
12.5.1 Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	379
12.5.2 Die Laplace-Gleichung in der Halbebene . . . . .	382
12.6 Übungsaufgaben . . . . .	384
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>387</b>
<b>Index</b>	<b>389</b>