

GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATIK

1

ZAHLEN UND RECHNEN

2

PROZENT- UND ZINSRECHNUNG

3

GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

4

FUNKTIONEN

5

PLANIMETRIE

6

KÖRPERDARSTELLUNG UND KÖRPERBERECHNUNG

7

STOCHASTIK

8

RECHENHILFSMITTEL

9

ANHANG

A

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe der Mathematik	9
1.1	Aussagen	10
1.1.1	Zeichen und Zeichenreihen in der Mathematik	10
1.1.2	Wahrheitswerte von Aussagen	14
1.1.3	Erfüllbarkeit von Aussageformen	15
1.1.4	Logische Operationen	16
1.1.5	Definitionen	21
1.1.6	Sätze und Beweise	22
1.2	Mengen	26
1.2.1	Begriff Menge	26
1.2.2	Darstellung von Mengen	27
1.2.3	Mächtigkeit von Mengen	28
1.2.4	Relationen zwischen zwei Mengen	29
1.2.5	Mengenoperationen	31
2	Zahlen und Rechnen	35
2.1	Natürliche Zahlen	36
2.1.1	Zahlbegriff; Zahldarstellungen	36
2.1.2	Rechnen mit natürlichen Zahlen	39
2.1.3	Vielfache und Teiler	45
2.2	Ganze Zahlen	49
2.2.1	Zahlbegriff; Zahldarstellungen	49
2.2.2	Rechnen mit ganzen Zahlen	51
2.3	Bruchzahlen (gebrochene Zahlen)	57
2.3.1	Zahlbegriff; Zahldarstellungen	57
2.3.2	Rechnen mit gemeinen Brüchen (Bruchrechnung)	61
2.3.3	Dezimalbrüche; Rechnen mit Dezimalbrüchen	65
2.4	Rationale Zahlen	68
2.4.1	Zahlbegriff; Zahldarstellungen	68
2.4.2	Rechnen mit rationalen Zahlen	70
2.5	Reelle Zahlen	73
2.5.1	Zahlbegriff	73
2.5.2	Rechnen mit reellen Zahlen	74
2.6	Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	75
2.6.1	Potenzbegriff; Potenzgesetze; Rechnen mit Potenzen	75
2.6.2	Wurzelbegriff; Wurzelgesetze; Rechnen mit Wurzeln	79
2.6.3	Logarithmen; Logarithmengesetze	80
2.7	Größen	81
2.7.1	Begriff Größe; Größenbereiche	81
2.7.2	Längen-, Flächen- und Volumeneinheiten	82
2.7.3	Masseeinheiten	84
2.7.4	Zeiteinheiten	84
2.7.5	Währungseinheiten	85
2.8	Rechnen mit Näherungswerten	86
2.8.1	Grundbegriffe	86
2.8.2	Rechnen mit Näherungswerten	87

3	Prozent- und Zinsrechnung	89
3.1	Prozentrechnung	90
3.1.1	Grundbegriffe	90
3.1.2	Bequeme Prozentsätze	90
3.1.3	Berechnen von Prozentwerten, Prozentsätzen und Grundwerten	91
3.1.4	Grafische Darstellungen von Prozentsätzen	94
3.2	Promillerechnung	95
3.3	Zinsrechnung	96
3.3.1	Grundbegriffe	96
3.3.2	Berechnen von Zinsen, Zinssatz, Kapital und Zeitspanne	96
3.3.3	Zinseszins	100
3.4	Rentenrechnung	102
3.4.1	Ratenzahlungen	102
3.4.2	Schuldentlastung	104
4	Gleichungen und Ungleichungen	105
4.1	Variable und Term	106
4.1.1	Begriffe Variable und Term	106
4.1.2	Rechnen mit Variablen; Termumformungen	107
4.2	Grundlagen der Gleichungslehre	111
4.2.1	Begriffe Gleichung und Ungleichung	111
4.2.2	Lösen einer Gleichung bzw. Ungleichung; Lösungsmenge	112
4.2.3	Proben bei Gleichungen und Ungleichungen	114
4.2.4	Inhaltliches Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen	115
4.3	Äquivalentes Umformen von Gleichungen und Ungleichungen	117
4.3.1	Begriff Äquivalenz	117
4.3.2	Äquivalentes Umformen von Gleichungen	117
4.3.3	Äquivalentes Umformen von Ungleichungen	119
4.4	Lineare Gleichungen	120
4.4.1	Lineare Gleichungen mit einer Variablen	120
4.4.2	Lineare Gleichungen mit zwei Variablen	123
4.5	Lineare Ungleichungen	124
4.5.1	Lineare Ungleichungen mit einer Variablen	124
4.5.2	Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen	125
4.6	Lineare Gleichungssysteme	126
4.6.1	Begriff lineares Gleichungssystem	126
4.6.2	Lösen linearer Gleichungssysteme	126
4.7	Quadratische Gleichungen	129
4.7.1	Begriffe	129
4.7.2	Lösungsverfahren für spezielle quadratische Gleichungen	129
4.7.3	Lösungsformel für quadratische Gleichungen	130
4.7.4	Diskussion der Lösungen einer quadratischen Gleichung	131
4.7.5	Wurzelsatz von VIETA	132
4.8	Bruchgleichungen und Bruchungleichungen	133
4.9	Algebraische Gleichungen höheren Grades	135
4.9.1	Begriffe	135
4.9.2	Kubische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades	135
4.9.3	Polynomdivision	137

4.10 Wurzel-, Exponential- und Logarithmengleichungen	139
4.10.1 Begriffe	139
4.10.2 Lösen von Wurzelgleichungen	139
4.10.3 Lösen von Exponentialgleichungen	141
4.10.4 Lösen von Logarithmengleichungen	142
4.11 Trigonometrische Gleichungen	143
4.12 Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen mit einer Variablen	144
4.12.1 Iterationsverfahren	144
4.12.2 Nullstellenbestimmung durch Intervallschachtelung	145
4.12.3 Sekantennäherungsverfahren (regula falsi)	146
5 Funktionen	147
5.1 Grundbegriffe und Eigenschaften von Funktionen	148
5.1.1 Funktionsbegriff	148
5.1.2 Darstellung von Funktionen	149
5.1.3 Eigenschaften von Funktionen	150
5.1.4 Schnittpunkte von Funktionsgraphen mit den Achsen	152
5.2 Proportionalität	154
5.2.1 Direkte Proportionalität	154
5.2.2 Indirekte Proportionalität	155
5.3 Lineare Funktionen	157
5.3.1 Funktionen mit der Gleichung $y = m \cdot x$	157
5.3.2 Funktionen mit der Gleichung $y = m \cdot x + n$ ($n \neq 0$)	159
5.4 Quadratische Funktionen	162
5.4.1 Graphen quadratischer Funktionen	162
5.4.2 Nullstellen der Funktionen mit $y = x^2 + px + q$	164
5.4.3 Die Funktionen mit $y = ax^2 + bx + c$	165
5.5 Potenzfunktionen	166
5.5.1 Potenzfunktionen mit geraden Exponenten	166
5.5.2 Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten	167
5.6 Wurzelfunktionen	168
5.6.1 Die Funktion mit $f(x) = \sqrt[2]{x}$	168
5.6.2 Die Funktionen mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$	168
5.7 Exponentialfunktionen	169
5.7.1 Die Funktionen mit $f(x) = a^x$	169
5.7.2 Die Funktion mit $f(x) = e^x$	169
5.8 Logarithmusfunktionen	170
5.8.1 Die Funktionen mit $f(x) = \log_a x$	170
5.8.2 Die Funktionen mit $f(x) = \lg x$ und $f(x) = \ln x$	170
5.9 Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen)	171
5.9.1 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens am rechtwinkligen Dreieck	171
5.9.2 Winkelfunktionen am Kreis	171
5.9.3 Graphen und Eigenschaften der Winkelfunktionen	173
6 Planimetrie	177
6.1 Grundbegriffe	178
6.1.1 Ebene, Linie, Punkt, Gerade, Strahl und Strecke	178
6.1.2 Länge und Längenmessung	182
6.1.3 Fläche und Flächeninhaltsmessung	183

6.1.4	Winkel und Winkelmessung	184
6.2	Konstruktionen	191
6.2.1	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	191
6.2.2	Konstruktionen mit Zeichendreieck, Lineal und Geodreieck	193
6.2.3	Konstruktionen mit der Methode der Bestimmungslinien	194
6.2.4	Softwaregestütztes Konstruieren	195
6.3	Geometrische Abbildungen.	197
6.3.1	Ähnlichkeitsabbildungen.	198
6.3.2	Kongruenzabbildungen	199
6.4	Bewegung, Kongruenz und Symmetrie	201
6.4.1	Spezielle Bewegungen.	201
6.4.2	Nacheinanderausführung von Bewegungen	204
6.4.3	Kongruenz	207
6.4.4	Symmetrie	208
6.5	Zentrische Streckung, Ähnlichkeit und Strahlensätze	210
6.5.1	Die zentrische Streckung	210
6.5.2	Ähnlichkeit	212
6.5.3	Strahlensätze	213
6.6	Dreiecke	217
6.6.1	Dreiecksarten	217
6.6.2	Sätze über das Dreieck	218
6.6.3	Besondere Linien und Punkte des Dreiecks	219
6.6.4	Kongruenz von Dreiecken	221
6.6.5	Ähnlichkeit von Dreiecken	224
6.6.6	Konstruktion von Dreiecken	224
6.6.7	Flächeninhaltsberechnung von Dreiecken	227
6.6.8	Satzgruppe des PYTHAGORAS	229
6.6.9	Anwendung der trigonometrischen Funktionen	233
6.7	Vierecke	239
6.7.1	Allgemeines Viereck	239
6.7.2	Klassifizierung von Vierecken	240
6.7.3	Spezielle Vierecke und deren Eigenschaften	244
6.8	Vielecke (Polygone)	250
6.8.1	Allgemeine Eigenschaften	250
6.8.2	Regelmäßige n-Ecke	251
6.9	Kreis	253
6.9.1	Begriffe	253
6.9.2	Winkel am Kreis	258
6.9.3	Inkreis und Umkreis von Vielecken	260
6.9.4	Berechnungen am Kreis	261
7	Körperdarstellung und Körperberechnung	263
7.1	Grundlagen der Körperdarstellung	264
7.1.1	Begriffe und Merkmale geometrischer Körper	264
7.1.2	Projektionsarten	266
7.1.3	Schräge Parallelprojektionen	267
7.1.4	Senkrechte Parallelprojektionen	269
7.1.5	Körpernetze	271
7.2	Grundlagen der Körperberechnung	272
7.3	Würfel und Quader	273

7.3.1	Begriffe und Formeln	273
7.3.2	Darstellung von Würfeln und Quadern	274
7.4	Prisma und Kreiszylinder	275
7.4.1	Begriffe und Formeln	275
7.4.2	Darstellung von Kreiszylindern und Prismen	279
7.5	Pyramide und Kreiskegel	282
7.5.1	Begriffe und Formeln	282
7.5.2	Darstellung von Pyramiden und Kreiskegeln	287
7.6	Pyramidenstumpf und Kreiskegelstumpf	289
7.7	Kugel	292
7.8	Zusammengesetzte Körper	293
7.9	Regelmäßige Polyeder	295
8	Stochastik	297
8.1	Kombinatorisches Rechnen; Zählstrategien	298
8.1.1	Anordnungen	298
8.1.2	Zählstrategien	302
8.2	Elemente der beschreibenden Statistik	304
8.2.1	Statistische Erhebungen (Erfassen und Auswerten von Daten)	304
8.2.2	Statistische Kenngrößen (bei Häufigkeitsverteilungen)	309
8.3	Wahrscheinlichkeitsrechnung	314
8.3.1	Vorgänge mit zufälligem Ergebnis; zufällige Ereignisse	314
8.3.2	Elementarer Wahrscheinlichkeitsbegriff; Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	316
8.3.3	Mehrstufige Zufallsversuche	317
8.3.4	Zufallsgrößen und ihre Verteilung	323
9	Rechenhilfsmittel	327
9.1	Geschichtlicher Abriss	328
9.2	Elektronische Hilfsmittel	331
9.2.1	Der elektronische Taschenrechner	331
9.2.2	Grafikfähige Taschenrechner	334
9.2.3	ComputeralgebraSysteme	336
9.2.4	Tabellenkalkulationsprogramme	338
Anhang	341	
Übersicht zur Herkunft ausgewählter mathematischer Begriffe	342	
Mathematische Zeichen und Symbole	345	
Griechisches Alphabet	346	
Römische Zahlzeichen	346	
Rundungsregeln	347	
Primzahlen; Primfaktorzerlegung der Zahlen bis 1000	347	
Quadratzahlen; Kubikzahlen; Quadratwurzeln; Kubikwurzeln	349	
Vorsätze	350	
Einheiten von Größen	350	
Nichtdezimale Einheiten	351	
Umrechnung Gradmaß in Bogenmaß	353	
Kreisflächeninhalt	354	
Die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$	356	
Zufallszahlen	356	

Fakultäten $n!$	359
Binomialkoeffizienten	360
Binomiale Wahrscheinlichkeiten $b(n; p; k)$	361
Standardnormalverteilung	362
Aufbau der Zahlenbereiche; Intervalle	363
Intervalle (spezielle Teilmengen von \mathbb{R})	363
Potenzen	364
Wurzeln	364
Logarithmen	364
Dreisatz	365
Kettensatz	365
Mischungsrechnen	366
Mittelwerte	366
Winkel	367
Dreiecke	367
Dreiecksarten	368
Vierecke	369
Regelmäßige Vielecke	370
Kreis	370
Körper mit ebenen Begrenzungsflächen	371
Körper mit gekrümmten Begrenzungsflächen	372
Winkelfunktionen	373
Kleine Einführung in die Vektorrechnung	375
Vektorbegriff	375
Addition von Vektoren	376
Vielfachbildung von Vektoren	377
Beweise unter Verwendung von Vektoren	378
Komponentenzerlegung	379
Skalarprodukt von Vektoren	380
Register	381