

# Inhalt

## I Lineare Algebra

1	Logik und Beweistechnik	13
1.1	Negation	13
1.2	Konjunktion	13
1.3	Disjunktion	14
1.4	Implikation	15
1.5	Äquivalenz	15
1.6	Tautologie	16
1.7	Tautologische Implikation	16
1.8	Beispiele tautologischer Implikationen und Äquivalenzen	17
1.9	Konsistenz von Prämissen	17
1.10	Der indirekte Beweis	18
1.11	Beweis durch Kontraposition	19
1.12	Quantoren, Beweis durch Gegenbeispiel	20
1.13	Vollständige Induktion	20
2	Mengen und Mengenoperationen	23
2.1	Definition einer Menge	23
2.2	Teilmengen und Gleichheit von Mengen	23
2.3	Vereinigung und Durchschnitt von Mengen	24
2.4	Die leere Menge und die Komplementärmenge	28
2.5	Zahlenmengen	30
2.6	Abbildungen von Mengen	30
2.7	Ergänzungen und Aufgaben	31
3	Reelle und komplexe Zahlen	33
3.1	Algebraische Struktur der reellen Zahlen	33
3.2	Ordnungsstruktur und das Rechnen mit Ungleichungen	34
3.3	Absolutbetrag einer reellen Zahl	35
3.4	Komplexe Zahlen	35
3.5	Polynome und ihre Nullstellen	38
4	Vektorraum, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	41
4.1	Vektoren und Vektorraum	41
4.2	Lineare Abhängigkeit und Basis	48
4.3	Inneres Produkt zweier Vektoren	51

4.4	Lineare Gleichungen im Vektorraum . . . . .	54
4.4.1	Lineare homogene Gleichungen (LHG) . . . . .	54
4.4.2	Lineare inhomogene Gleichungen (LIG) . . . . .	56
4.5	Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme . . . . .	57
4.6	Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen . . . . .	59
4.7	Berechnung der Basis des Lösungsraumes für ein homogenes Gleichungssystem . . . . .	61
4.8	Lösungsmethode für den inhomogenen Fall . . . . .	65
4.9	Ergänzungen und Aufgaben . . . . .	68
5	Matrizen und lineare Transformationen . . . . .	69
5.1	Definition und Rang einer Matrix . . . . .	69
5.2	Lineare Transformationen und ihre Darstellung durch Matrizen, Rechnen mit Matrizen . . . . .	70
5.3	Beispiele und Ergänzungen . . . . .	75
5.4	Die Einheitsmatrix . . . . .	76
5.5	Die Inverse einer Matrix . . . . .	77
5.6	Idempotente Matrizen . . . . .	79
5.7	Transponierte einer Matrix, symmetrische Matrizen, orthogonale Matrizen . . . . .	80
5.8	Ergänzungen und Aufgaben . . . . .	81
6	Determinanten . . . . .	84
6.1	Definition der Determinante . . . . .	84
6.2	Eigenschaften der Determinante . . . . .	84
6.3	Berechnung von Determinanten (Entwicklungssatz) . . . . .	87
6.4	Multiplikationssatz für Determinanten . . . . .	89
6.5	Ergänzungen und Aufgaben . . . . .	89
7	Eigenwerte und Quadratische Formen . . . . .	92
7.1	Einführung in das Problem der Eigenwerte . . . . .	92
7.2	Die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms . . . . .	93
7.3	Die Eigenwerte und Eigenvektoren reeller symmetrischer Matrizen . . . . .	94
7.4	Ähnliche Matrizen . . . . .	95
7.5	Quadratische Formen . . . . .	96
7.6	Transformation einer quadratischen Form auf eine Summe von Quadraten . . . . .	97
7.7	Ergänzungen und Aufgaben . . . . .	98

## II Analysis

8	Topologische Struktur, Vollständigkeit der reellen Zahlen, Folgen	103
8.1	Vorbemerkungen	103
8.2	Vollständigkeit der reellen Zahlen	104
8.3	Der Euklidische Raum	105
8.4	Offene und abgeschlossene Mengen, konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$	106
8.5	Beispiele und Übungen	110
8.6	Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$	111
8.7	Teilfolgen	114
9	Reelle Funktionen und Stetigkeit	116
9.1	Abbildungen und reelle Funktionen	116
9.2	Reelles Vielfaches, Summe, Differenz, Produkt, Quotient von Funktionen	117
9.3	Verkettete Funktionen, besondere Typen von Funktionen	118
9.4	Stetigkeit reeller Funktionen	120
9.5	Zweite Stetigkeitsdefinition	121
9.6	Grenzwerte reeller Funktionen	122
9.7	Eigenschaften stetiger Funktionen	124
9.8	Rationale Operationen mit stetigen Funktionen	125
10	Differenzierbare Funktionen	127
10.1	Vorbetrachtung	127
10.2	Partielle Ableitung	102
10.3	Das Differential einer Funktion	135
10.4	Kettenregel	137
10.5	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	139
11	Anwendung der Differentialrechnung	141
11.1	Implizite Funktionen	141
11.2	Extrema reeller Funktionen	145
11.2.1	Extrema ohne Nebenbedingungen	145
11.2.2	Extrema mit Nebenbedingungen	151
12	Integrierbare Funktionen	156
12.1	Der Differentialoperator $D$	156
12.2	Stammfunktion, Integralfunktion, bestimmtes Integral	157
12.3	Interpretation des bestimmten Integrals als Flächenmaß. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	159
12.4	Das Rechnen mit bestimmten Integralen, Mittelwertsatz der Integralrechnung	161
12.5	Integrationsregeln	163
12.6	Mehrfache Integration	166
12.7	Stammfunktion eines Systems von partiellen Ableitungen	169

13 Differential- und Differenzengleichungen . . . . .	170
13.1 Der $\Delta$ -Operator . . . . .	170
13.2 Beispiele und Definition von Differenzen und Differentialgleichungen . .	171
13.3 Lineare Gleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . .	175
13.4 Lineare Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .	179
13.5 Lineare Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .	182
13.6 Beispiele von Systemen von Gleichungen . . . . .	183

## Anhang

A.1 Die einfache Summe . . . . .	186
A.2 Die Doppelsumme und mehrfache Summe . . . . .	187
A.3 Das Produktzeichen . . . . .	188
A.4 Fakultät, Binomialquotient und Binomischer Satz . . . . .	189
A.5 Permutationen und Kombinationen . . . . .	190
A.5.1 Permutationen von $n$ verschiedenen Elementen . . . . .	190
A.5.2 Transpositionen und Inversionen . . . . .	191
A.5.3 Permutationen von $n$ nicht alle voneinander verschiedenen Elementen . . . . .	191
A.5.4 Kombinationen . . . . .	192
A.5.5 Kombinationen ohne Wiederholung, mit Berücksichtigung der Anordnung . . . . .	192
A.5.6 Kombinationen mit Wiederholung, mit Berücksichtigung der Anordnung . . . . .	193
A.5.7 Kombinationen ohne Wiederholung, ohne Berücksichtigung der Anordnung . . . . .	193
A.5.8 Kombinationen mit Wiederholung, ohne Berücksichtigung der Anordnung . . . . .	193
A.6 Unendliche Reihen . . . . .	194
A.7 Taylorreihen . . . . .	200
A.7.1 Vorbemerkung . . . . .	200
A.7.2 Der Satz von Taylor . . . . .	200
A.7.3 Taylorreihe und Restglied . . . . .	202
A.7.4 Eigenschaften der Taylorreihe $T_f(x)$ . . . . .	203
A.7.5 Bedingungen für $T_f(x) = f(x)$ . . . . .	204
A.7.6 Beispiele und Aufgaben zur Taylorentwicklung . . . . .	205
A.7.7 Taylorentwicklung reeller Funktionen mit $n$ Variablen . . . . .	206
Register . . . . .	209