

# Inhalt

|  |    |
|--|----|
| <b>1 Mengen, reelle Zahlen</b> . . . . .                         | 1  |
| 1.1 Begriffe und Sprechweisen . . . . .                          | 1  |
| 1.2 Mengenoperationen . . . . .                                  | 3  |
| 1.3 Die Menge der reellen Zahlen . . . . .                       | 3  |
| 1.3.1 Grundgesetze der Addition und der Multiplikation . . . . . | 4  |
| 1.3.2 Grundgesetze der Anordnung . . . . .                       | 6  |
| 1.3.3 Eigenschaften der Vollständigkeit . . . . .                | 12 |
| Aufgaben . . . . .   | 12 |
| 1.4 Vollständige Induktion . . . . .                             | 13 |
| 1.4.1 Summenschreibweise . . . . .                               | 13 |
| 1.4.2 Vollständige Induktion bei Summenformeln . . . . .         | 15 |
| 1.4.3 Vollständige Induktion bei Ungleichungen . . . . .         | 18 |
| 1.4.4 Binomischer Satz . . . . .                                 | 19 |
| Aufgaben . . . . .   | 22 |
| <b>2 Funktionen</b> . . . . .                                    | 24 |
| 2.1 Grundbegriffe . . . . .                                      | 24 |
| 2.1.1 Einige spezielle Funktionen . . . . .                      | 28 |
| 2.1.2 Umkehrfunktion und Verkettung von Funktionen . . . . .     | 30 |
| Aufgaben . . . . .   | 36 |
| 2.2 Eigenschaften von Funktionen . . . . .                       | 38 |
| Aufgaben . . . . .   | 43 |
| 2.3 Rationale Funktionen . . . . .                               | 44 |
| 2.3.1 Ganzrationale Funktionen . . . . .                         | 44 |
| 2.3.2 Gebrochenrationale Funktionen . . . . .                    | 49 |
| Aufgaben . . . . .   | 55 |
| 2.4 Potenzfunktionen . . . . .                                   | 56 |
| 2.5 Trigonometrische Funktionen und Arcusfunktionen . . . . .    | 58 |
| 2.5.1 Sinusfunktion und Kosinusfunktion . . . . .                | 59 |
| 2.5.2 Tangensfunktion und Kotangensfunktion . . . . .            | 61 |
| 2.5.3 Arcus-Funktionen . . . . .                                 | 64 |
| Aufgaben . . . . .   | 68 |

|  |            |
|--|------------|
| <b>3 Zahlenfolgen und Grenzwerte . . . . .</b>                             | <b>70</b>  |
| 3.1 Definition und Eigenschaften von Folgen . . . . .                      | 70         |
| Aufgaben . . . . .   | 74         |
| 3.2 Konvergente Folgen . . . . .   | 76         |
| 3.2.1 Grenzwert einer Folge . . . . .                                      | 76         |
| 3.2.2 Rechnen mit Grenzwerten . . . . .                                    | 84         |
| Aufgaben . . . . .   | 91         |
| 3.3 Monotone und beschränkte Folgen . . . . .                              | 93         |
| 3.3.1 Konvergenzkriterium monotoner Folgen . . . . .                       | 93         |
| 3.3.2 Die Eulersche Zahl e . . . . .                                       | 96         |
| Aufgaben . . . . .   | 98         |
| 3.4 Die e- und die ln-Funktion . . . . .                                   | 99         |
| Aufgaben . . . . .   | 106        |
| <br>   |            |
| <b>4 Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit . . . . .</b>                   | <b>108</b> |
| 4.1 Grenzwert von $f$ für $x \rightarrow \infty$ . . . . .                 | 108        |
| Aufgaben . . . . .   | 117        |
| 4.2 Grenzwert von $f$ für $x \rightarrow x_0$ . . . . .                    | 118        |
| 4.2.1 Definition des Grenzwertes von $f$ für $x \rightarrow x_0$ . . . . . | 118        |
| 4.2.2 Einseitige Grenzwerte; Uneigentliche Grenzwerte . . . . .            | 125        |
| 4.2.3 Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen . . . . .                     | 130        |
| Aufgaben . . . . .   | 136        |
| 4.3 Stetige und unstetige Funktionen . . . . .                             | 138        |
| 4.3.1 Definition der Stetigkeit . . . . .                                  | 138        |
| 4.3.2 Klassifikation von Unstetigkeitsstellen . . . . .                    | 142        |
| 4.3.3 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .                          | 146        |
| Aufgaben . . . . .   | 154        |
| 4.4 Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .              | 156        |
| Aufgaben . . . . .   | 160        |
| 4.5 Die hyperbolischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen . . . . .      | 161        |
| Aufgaben . . . . .   | 166        |
| 4.6 Spezielle Grenzwerte . . . . .   | 166        |
| <br>   |            |
| <b>5 Die komplexen Zahlen . . . . .</b>                                    | <b>169</b> |
| 5.1 Definition der Menge $\mathbb{C}$ . . . . .                            | 169        |
| Aufgaben . . . . .   | 182        |
| 5.2 Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen . . . . .                | 183        |
| Aufgaben . . . . .   | 187        |

---

|   |            |
|---|------------|
| 5.3 Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren . . . . .                    | 188        |
| Aufgaben . . . . .  | 197        |
| <b>6 Lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten . . . . .</b>       | <b>199</b> |
| 6.1 Lineare Gleichungssysteme; das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . . . | 199        |
| 6.1.1 Vorberichtigungen . . . . .   | 199        |
| 6.1.2 Das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . . .                          | 200        |
| Aufgaben . . . . .  | 204        |
| 6.2 Matrizen . . . . .  | 204        |
| 6.2.1 Grundbegriffe . . . . .   | 204        |
| 6.2.2 Addition und Multiplikation von Matrizen . . . . .                    | 208        |
| 6.2.3 Die Inverse einer Matrix . . . . .                                    | 216        |
| Aufgaben . . . . .  | 218        |
| 6.3 Determinanten . . . . .   | 220        |
| 6.3.1 Definition der Determinante . . . . .                                 | 220        |
| 6.3.2 Eigenschaften der Determinanten . . . . .                             | 224        |
| 6.3.3 Berechnung der Inversen einer regulären Matrix . . . . .              | 228        |
| Aufgaben . . . . .  | 231        |
| 6.4 Lineare Gleichungssysteme . . . . .                                     | 233        |
| 6.4.1 Allgemeines über die Lösungen von Gleichungssystemen . . . . .        | 233        |
| 6.4.2 Quadratische, lineare Systeme mit regulären Matrizen . . . . .        | 237        |
| Aufgaben . . . . .  | 243        |
| <b>7 Vektoren und ihre Anwendungen . . . . .</b>                            | <b>245</b> |
| 7.1 Vektoroperationen . . . . .   | 247        |
| 7.1.1 Vektoraddition . . . . .  | 247        |
| 7.1.2 Produkt eines Vektors mit einer reellen Zahl . . . . .                | 250        |
| 7.1.3 Das Skalarprodukt . . . . .   | 253        |
| 7.1.4 Das vektorielle Produkt . . . . .                                     | 259        |
| 7.1.5 Das Spatprodukt . . . . .   | 263        |
| Aufgaben . . . . .  | 265        |
| 7.2 Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems . . . . .      | 267        |
| 7.2.1 Lineare Abhängigkeit . . . . .  | 267        |
| 7.2.2 Komponentenschreibweise . . . . .                                     | 270        |
| 7.2.3 Anwendung in der Geometrie . . . . .                                  | 279        |
| 7.2.4 Mehrfachprodukte . . . . .  | 290        |
| Aufgaben . . . . .  | 292        |
| 7.3 Geometrische und Koordinaten-Transformationen . . . . .                 | 294        |
| 7.3.1 Geometrische 3D-Transformationen . . . . .                            | 295        |
| 7.3.2 Koordinatentransformationen . . . . .                                 | 305        |
| Aufgaben . . . . .  | 309        |

|   |            |
|---|------------|
| 7.4 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen . . . . .                             | 310        |
| Aufgaben . . . . .  | 326        |
| 7.5 Numerisches Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen . . . . .      | 327        |
| 7.5.1 Probleme bei der numerischen Behandlung . . . . .                             | 327        |
| 7.5.2 Der QR-Algorithmus . . . . .  | 333        |
| Aufgaben . . . . .  | 338        |
| <b>8 Differentialrechnung . . . . .</b>   | <b>339</b> |
| 8.1 Begriff der Ableitung . . . . .   | 339        |
| 8.1.1 Steigung einer Kurve . . . . .  | 339        |
| 8.1.2 Definition der Ableitung . . . . .  | 340        |
| 8.1.3 Einseitige und uneigentliche Ableitungen . . . . .                            | 344        |
| 8.1.4 Anwendungen der Ableitung in den Naturwissenschaften . . . . .                | 348        |
| Aufgaben . . . . .  | 353        |
| 8.2 Ableitungsregeln . . . . .  | 354        |
| 8.2.1 Ableitung einiger Funktionen . . . . .  | 354        |
| 8.2.2 Differentiation einer Linearkombination von Funktionen . . . . .              | 356        |
| 8.2.3 Die Produktregel . . . . .  | 358        |
| 8.2.4 Die Quotientenregel . . . . .   | 359        |
| 8.2.5 Ableitung einer mittelbaren Funktion . . . . .                                | 361        |
| 8.2.6 Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .  | 363        |
| 8.2.7 Höhere Ableitungen . . . . .  | 365        |
| Aufgaben . . . . .  | 368        |
| 8.3 Ableitung elementarer Funktionen . . . . .                                      | 369        |
| 8.3.1 Ableitung der rationalen Funktionen . . . . .                                 | 370        |
| 8.3.2 Ableitung der trigonometrischen Funktionen und der Arcus-Funktionen . . . . . | 370        |
| 8.3.3 Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .                  | 373        |
| 8.3.4 Ableitung der hyperbolischen Funktionen und der Area-Funktionen . . . . .     | 376        |
| Aufgaben . . . . .  | 379        |
| 8.4 Das Differential einer Funktion . . . . .                                       | 381        |
| 8.4.1 Der Begriff des Differentials . . . . .                                       | 381        |
| 8.4.2 Anwendung in der Fehlerrechnung . . . . .                                     | 383        |
| Aufgaben . . . . .  | 385        |
| 8.5 Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .                               | 387        |
| 8.5.1 Satz von Rolle . . . . .  | 387        |
| 8.5.2 Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .                             | 390        |
| 8.5.3 Die Taylorsche Formel . . . . .   | 394        |
| 8.5.4 Numerische Differentiation . . . . .  | 401        |
| Aufgaben . . . . .  | 405        |
| 8.6 Berechnung von Grenzwerten . . . . .  | 407        |
| 8.6.1 Regeln von Bernoulli-de l'Hospital . . . . .                                  | 407        |
| 8.6.2 Anwendung auf weitere unbestimmte Formen . . . . .                            | 411        |
| Aufgaben . . . . .  | 413        |

---

|  |            |
|--|------------|
| 8.7 Kurvenuntersuchungen mit Hilfe der Differentialrechnung . . . . .        | 415        |
| 8.7.1 Monotone Funktionen . . . . .  | 415        |
| 8.7.2 Extremwerte . . . . .  | 416        |
| 8.7.3 Konvexität und Wendepunkt . . . . .                                    | 422        |
| Aufgaben . . . . .   | 430        |
| 8.8 Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen . . . . .                | 433        |
| 8.8.1 Allgemeines Iterationsverfahren . . . . .                              | 433        |
| 8.8.2 Das Iterationsverfahren von Newton . . . . .                           | 441        |
| 8.8.3 Regula falsi . . . . .   | 444        |
| Aufgaben . . . . .   | 446        |
| <br>   |            |
| <b>9 Integralrechnung . . . . .</b>  | <b>449</b> |
| 9.1 Das bestimmte Integral . . . . .   | 449        |
| 9.1.1 Einführung . . . . .   | 449        |
| 9.1.2 Zerlegungen . . . . .  | 450        |
| 9.1.3 Definition des bestimmten Integrals . . . . .                          | 452        |
| 9.1.4 Weitere Definitionen und Sätze über integrierbare Funktionen . . . . . | 456        |
| 9.1.5 Flächeninhalt . . . . .  | 468        |
| Aufgaben . . . . .   | 470        |
| 9.2 Das unbestimmte Integral . . . . .                                       | 470        |
| 9.2.1 Integralfunktion . . . . .   | 470        |
| 9.2.2 Stammfunktion und unbestimmtes Integral . . . . .                      | 477        |
| Aufgaben . . . . .   | 480        |
| 9.3 Integrationsmethoden . . . . .   | 481        |
| 9.3.1 Grundintegrale . . . . .   | 481        |
| 9.3.2 Grundformeln . . . . .   | 482        |
| 9.3.3 Partielle Integration . . . . .  | 487        |
| 9.3.4 Integration durch Substitution . . . . .                               | 491        |
| 9.3.5 Tabelle unbestimmter Integrale . . . . .                               | 494        |
| Aufgaben . . . . .   | 497        |
| 9.4 Uneigentliche Integrale . . . . .  | 498        |
| 9.4.1 Integrale über unbeschränkte Intervalle . . . . .                      | 499        |
| 9.4.2 Integrale von nicht beschränkten Funktionen . . . . .                  | 506        |
| 9.4.3 Die $\Gamma$ -Funktion . . . . .                                       | 508        |
| Aufgaben . . . . .   | 511        |
| 9.5 Numerische Integration . . . . .   | 512        |
| 9.5.1 Vor betrachtungen . . . . .  | 512        |
| 9.5.2 Spezielle Integrationsformeln . . . . .                                | 513        |
| 9.5.3 Summierte Integrationsformeln . . . . .                                | 517        |
| Aufgaben . . . . .   | 525        |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Anhang Aufgabenlösung</b> . . . . . | 526 |
| <b>Zu Abschnitt 1</b> . . . . .        | 526 |
| <b>Zu Abschnitt 2</b> . . . . .        | 528 |
| <b>Zu Abschnitt 3</b> . . . . .        | 534 |
| <b>Zu Abschnitt 4</b> . . . . .        | 540 |
| <b>Zu Abschnitt 5</b> . . . . .        | 548 |
| <b>Zu Abschnitt 6</b> . . . . .        | 552 |
| <b>Zu Abschnitt 7</b> . . . . .        | 557 |
| <b>Zu Abschnitt 8</b> . . . . .        | 572 |
| <b>Zu Abschnitt 9</b> . . . . .        | 602 |
| <b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .  | 611 |
| <b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .   | 613 |