

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>9</b>
1.1 Allgemeines zur Methode der finiten Elemente	9
1.2 Beispiele zur Überführung eines Problems in eine Variationsgleichung	13
1.2.1 Ein Randwertproblem: Beispiel 1	13
1.2.2 Ein Randwertproblem: Beispiel 2	15
<b>2. Das Grundkonzept</b>	<b>17</b>
2.1 Stetiges und diskretes Problem. Beispiele von finiten Elementen	17
2.1.1 Die Grundzüge der Methode	17
2.1.2 Ein erstes Beispiel und eine Schwierigkeit	21
2.1.3 Die Funktionenräume $L^2$ und $H^1$	24
2.1.4 Das erste Beispiel (Fortsetzung)	30
2.1.5 Präzisierung der Grundzüge der Methode	32
2.1.6 Beispiele von finiten Elementen	41
2.2 Der Aufbau des Gleichungssystems	56
2.2.1 Elementmatrix	56
2.2.2 Die Elementmatrix für eine spezielle Bilinearform und Dreieckelemente vom Typ 1	57
2.2.3 Die Elementmatrix für Dreieckelemente vom Typ 2	64
2.2.4 Die Elementmatrix für Rechteckelemente vom Typ 1 bzw. bilineare Viereckelemente	67
2.2.5 Die Elementmatrix für den Laplace-Operator mit Tetraeder- elementen	69
2.2.6 Elementmatrix für den Laplace-Operator mit trilinearen Quaderelementen	72
<b>3. Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen</b>	<b>74</b>
3.1 Begriff und Anwendung direkter und iterativer Verfahren	74
3.1.1 Der Gaußsche Algorithmus	76
3.1.2 Symmetrische Matrizen. Das Cholesky-Verfahren	83
3.1.3 Die Frontlösungsmethode	88
3.2 Iterative Verfahren	94
3.2.1 Allgemeine Bemerkungen	94
3.2.2 Das Jacobi-Verfahren, das Gauß-Seidel-Verfahren und das Verfahren der sukzessiven Überrelaxation (SOR)	97
3.2.3 Das Verfahren der konjugierten Gradienten	102
3.2.4 Vorkonditionierte CG-Verfahren	107
3.3 Mehrgitterverfahren	113
<b>4. Konvergenzaussagen</b>	<b>121</b>
4.1 Allgemeine Bemerkungen zur Konvergenzproblematik	121
4.2 Ein Beweis einer Fehlerabschätzung für Dreieckelemente vom Typ 1	123
4.2.1 Zurückführung des Konvergenzproblems auf ein Approximationsproblem	123

4.2.2 Die Approximation durch stückweise lineare Funktionen einer Dreieckerlegung .....	124
4.2.3 Fehlerabschätzung für Dreieckelemente vom Typ 1 .....	135
4.3 Zusammenfassung der Resultate .....	137
5. Numerische Integration .....	143
5.1 Allgemeine Bemerkungen .....	143
5.2 Ein Beweis einer Fehlerabschätzung für Dreieckelemente vom Typ 1 ..	144
5.3 Eine Übersicht: Passende Integrationsformeln .....	149
6. Randapproximation. Isoparametrische Elemente .....	161
6.1 Approximation des Gebietes $\Omega$ durch einen Polygonzug .....	161
6.2 Isoparametrische Elemente .....	164
6.3 Approximation des Gebietes mit Hilfe isoparametrischer Dreieckelemente vom Typ 2 .....	169
7. Nichtkonforme FEM .....	171
7.1 Nichtkonforme FEM für die Laplace-Gleichung .....	171
7.1.1 Das diskrete Problem .....	171
7.1.2 Das Konvergenzproblem .....	175
7.1.3 Beispiele nichtkonformer finiter Dreieck- und Rechteckelemente .....	176
7.2 Nichtkonforme FEM für die biharmonische Gleichung .....	184
7.2.1 Allgemeine Bemerkungen .....	184
7.2.2 Das stetige und das diskrete Problem .....	185
7.2.3 Beispiele nichtkonformer finiter Dreieck- und Rechteckelemente .....	189
8. Gemischte Verfahren .....	196
8.1 Gemischte Verfahren für die biharmonische Gleichung .....	196
8.2 Gemischte Verfahren für die Laplace-Gleichung .....	200
8.3 Ein Strömungsproblem .....	205
9. Nichtstationäre (parabolische) Aufgaben .....	212
9.1 Das stetige, das semidiskrete und das diskrete Problem .....	212
9.2 Numerische Integration von Anfangswertaufgaben für Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung .....	215
9.3 Die Diskretisierung des semidiskreten Problems .....	224
9.4 Eine Gesamtfehlerabschätzung .....	227
10. Gittergenerierung und Gittersteuerung .....	233
10.1 Erzeugung und Verfeinerung von Dreiecksgittern .....	234
10.2 Fehlerabschätzung und Gittersteuerung .....	238
Literatur .....	244
Sachverzeichnis .....	251