

Jochen Werner

# **Numerische Mathematik**

Band 2: Eigenwertaufgaben,  
lineare Optimierungsaufgaben,  
unrestringierte Optimierungsaufgaben

Mit 8 Abbildungen und 122 Aufgaben



# Inhaltsverzeichnis

<b>5</b>	<b>Eigenwertaufgaben</b>	<b>1</b>
5.1	Einige theoretische Grundlagen . . . . .	2
5.1.1	Der Satz von Gerschgorin . . . . .	2
5.1.2	Der Satz von Bauer-Fike . . . . .	6
5.1.3	Variationsprinzipien für Eigenwerte hermitescher Matrizen . . .	9
5.1.4	Der Satz von Schur . . . . .	12
	Aufgaben . . . . .	14
5.2	Das $QR$ -Verfahren . . . . .	18
5.2.1	Die Transformation einer Matrix auf Hessenberg-Form . . . . .	18
5.2.2	Die $QR$ -Zerlegung einer Hessenberg-Matrix . . . . .	24
5.2.3	Vektoriteration nach v. Mises . . . . .	29
5.2.4	Inverse Iteration nach Wielandt . . . . .	30
5.2.5	Die Konvergenz des einfachen $QR$ -Verfahrens . . . . .	32
5.2.6	Das $QR$ -Verfahren mit Shifts . . . . .	40
	Aufgaben . . . . .	46
5.3	Eigenwertaufgaben für symmetrische Matrizen . . . . .	52
5.3.1	Das Jacobi-Verfahren . . . . .	52
5.3.2	Das Bisektions-Verfahren . . . . .	56
5.3.3	Das $QR$ -Verfahren für symmetrische Matrizen . . . . .	61
5.3.4	Die Berechnung der Singulärwertzerlegung . . . . .	65
	Aufgaben . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Lineare Optimierungsaufgaben</b>	<b>81</b>
6.1	Einführung, Beispiele . . . . .	81
	Aufgaben . . . . .	86
6.2	Das Simplexverfahren . . . . .	87
6.2.1	Geometrische Grundlagen des Simplexverfahrens . . . . .	87
6.2.2	Die Phase II des Simplexverfahrens . . . . .	93
6.2.3	Die Vermeidung von Zyklen beim Simplexverfahren . . . . .	98
6.2.4	Die Phase I des Simplexverfahrens . . . . .	101
	Aufgaben . . . . .	106
6.3	Dualität bei linearen Programmen . . . . .	110
6.3.1	Schwacher und starker Dualitätssatz . . . . .	110
6.3.2	Ökonomische Interpretation der Dualität . . . . .	118
6.3.3	Das duale Simplexverfahren . . . . .	119

	Aufgaben . . . . .	124
6.4	Das Karmarkar-Verfahren . . . . .	128
6.4.1	Das Karmarkar-Verfahren und seine Motivation . . . . .	129
6.4.2	Die Konvergenz des Karmarkar-Verfahrens . . . . .	135
6.4.3	Zurückführung eines linearen Programms auf Karmarkar-Normalform . . . . .	138
	Aufgaben . . . . .	141
<b>7</b>	<b>Unrestringierte Optimierungsaufgaben</b>	<b>143</b>
7.1	Grundlagen . . . . .	144
7.1.1	Einführung . . . . .	144
7.1.2	Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung . . . . .	145
7.1.3	Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung . . . . .	152
7.1.4	Glatte konvexe Funktionen . . . . .	155
	Aufgaben . . . . .	158
7.2	Ein Modellalgorithmus . . . . .	162
7.2.1	Schrittweitenstrategien bei glatter Zielfunktion . . . . .	163
7.2.2	Konvergenz des Modellalgorithmus bei glatter Zielfunktion . . . . .	169
7.2.3	Das gedämpfte Gauß-Newton-Verfahren bei diskreten, nichtlinearen Approximationsaufgaben . . . . .	173
	Aufgaben . . . . .	184
7.3	Quasi-Newton-Verfahren . . . . .	192
7.3.1	Das Newton-Verfahren . . . . .	192
7.3.2	Die Broyden-Klasse und das BFGS-Verfahren . . . . .	195
7.3.3	Die globale Konvergenz des BFGS-Verfahrens . . . . .	203
7.3.4	Die superlineare Konvergenz des BFGS-Verfahrens . . . . .	206
	Aufgaben . . . . .	211
7.4	Verfahren der konjugierten Gradienten . . . . .	218
7.4.1	Quadratische Zielfunktionen . . . . .	219
7.4.2	Das Fletcher-Reeves-Verfahren . . . . .	224
7.4.3	Ein gedächtnisloses BFGS-Verfahren . . . . .	226
	Aufgaben . . . . .	231
7.5	Trust-Region-Verfahren . . . . .	236
7.5.1	Einführung . . . . .	236
7.5.2	Glatte, unrestringierte Optimierungsaufgaben . . . . .	238
7.5.3	Nichtlineare Ausgleichsprobleme . . . . .	248
7.5.4	Diskrete, nichtlineare Approximationsaufgaben . . . . .	249
	Aufgaben . . . . .	258

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>265</b>
-----------------------------	------------

<b>Index</b>	<b>273</b>
--------------	------------