

Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie	1
1 Grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	2
1.3 Spezielle Zahlenmengen	2
2 Rechnen mit reellen Zahlen	3
2.1 Reelle Zahlen und ihre Eigenschaften	3
2.1.1 Rationale, irrationale und reelle Zahlen	3
2.1.2 Rundungsregeln	3
2.1.3 Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade	4
2.1.4 Grundrechenarten	4
2.2 Intervalle	5
2.3 Bruchrechnung	5
2.4 Potenzen und Wurzeln	7
2.5 Logarithmen	8
2.6 Binomischer Lehrsatz	9
3 Elementare (endliche) Reihen	11
3.1 Definition einer Reihe	11
3.2 Arithmetische Reihen	11
3.3 Geometrische Reihen	11
3.4 Spezielle Zahlenreihen	12
4 Gleichungen mit einer Unbekannten	12
4.1 Algebraische Gleichungen	12
4.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	12
4.1.2 Lineare Gleichungen	13
4.1.3 Quadratische Gleichungen	13
4.1.4 Kubische Gleichungen	13
4.1.5 Bi-quadratische Gleichungen	15
4.2 Lösungshinweise für nichtalgebraische Gleichungen	16
4.3 Graphisches Lösungsverfahren	17
4.4 Tangentenverfahren von Newton	17
5 Lehrsätze aus der elementaren Geometrie	19
5.1 Satz des Pythagoras	19
5.2 Höhensatz	19
5.3 Kathetensatz (Euklid)	19
5.4 Satz des Thales	19
5.5 Strahlensätze	20
5.6 Sinussatz	20
5.7 Kosinussatz	20

6	Ebene geometrische Körper (Planimetrie)	21
6.1	Dreiecke	21
6.1.1	Allgemeine Beziehungen	21
6.1.2	Spezielle Dreiecke	21
6.1.2.1	Rechtwinkliges Dreieck	22
6.1.2.2	Gleichschenkliges Dreieck	22
6.1.2.3	Gleichseitiges Dreieck	22
6.2	Quadrat	22
6.3	Rechteck	23
6.4	Parallelogramm	23
6.5	Rhombus oder Raute	23
6.6	Trapez	24
6.7	Reguläres n-Eck	24
6.8	Kreis	24
6.9	Kreis Sektor oder Kreisabschnitt	25
6.10	Kreissegment oder Kreisabschnitt	25
6.11	Kreisring	25
6.12	Ellipse	25
7	Räumliche geometrische Körper (Stereometrie)	26
7.1	Würfel	26
7.2	Quader	26
7.3	Pyramide	26
7.4	Pyramidenstumpf	27
7.5	Tetraeder oder dreiseitige Pyramide	27
7.6	Gerader Kreiszylinder	27
7.7	Gerader Kreiskegel	28
7.8	Gerader Kreiskegelstumpf	28
7.9	Kugel	28
7.10	Kugelabschnitt, Kugelsegment oder Kugelkappe	29
7.11	Kugelschicht oder Kugelzone	29
7.12	Kugelausschnitt oder Kugelsektor	30
7.13	Ellipsoid	30
7.14	Rotationsparaboloid	30
7.15	Torus	31
7.16	Guldinsche Regeln für Rotationskörper	31
8	Koordinatensysteme	32
8.1	Ebene Koordinatensysteme	32
8.1.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	32
8.1.2	Polarkoordinaten	33
8.1.3	Koordinatentransformationen	33
8.1.3.1	Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems	33
8.1.3.2	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten	33
8.1.3.3	Drehung eines kartesischen Koordinatensystems	34
8.2	Räumliche Koordinatensysteme	35
8.2.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	35
8.2.2	Zylinderkoordinaten	35
8.2.3	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Zylinderkoordinaten	35

II Vektorrechnung	36
1 Grundlegende Begriffe	36
1.1 Vektoren und Skalare	36
1.2 Spezielle Vektoren	36
1.3 Gleichheit von Vektoren	37
1.4 Kollineare, parallele und anti-parallele Vektoren	37
2 Komponentendarstellung eines Vektors	38
2.1 Komponentendarstellung in einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem	38
2.2 Komponentendarstellung spezieller Vektoren	38
2.3 Betrag und Richtungswinkel eines Vektors	39
3 Vektoroperationen	40
3.1 Addition und Subtraktion von Vektoren	40
3.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	40
3.3 Skalarprodukt (inneres Produkt)	41
3.4 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	42
3.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt)	44
3.6 Formeln für Mehrfachprodukte	45
4 Ableitung eines Vektors nach einem Parameter	45
4.1 Vektordarstellung einer Kurve	45
4.2 Tangentenvektor (Ableitung eines Vektors nach einem Parameter)	46
5 Anwendungen	46
5.1 Arbeit einer konstanten Kraft	46
5.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor	47
5.3 Vektorielle Darstellung einer Geraden	47
5.3.1 Punkt-Richtungs-Form	47
5.3.2 Zwei-Punkte-Form	48
5.3.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden	48
5.3.4 Abstand zweier windschiefer Geraden	49
5.3.5 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	50
5.4 Vektorielle Darstellung einer Ebene	50
5.4.1 Punkt-Richtungs-Form	50
5.4.2 Drei-Punkte-Form	51
5.4.3 Ebene senkrecht zu einem Vektor	52
5.4.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene	52
5.4.5 Abstand einer Geraden von einer Ebene	53
5.4.6 Abstand zweier paralleler Ebenen	54
5.4.7 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	55
5.4.8 Schnittwinkel zweier Ebenen	56
III Funktionen und Kurven	57
1 Grundlegende Begriffe	57
1.1 Definition einer Funktion	57
1.2 Darstellungsformen einer Funktion	57
1.2.1 Analytische Darstellung	57
1.2.2 Graphische Darstellung	58

2	Allgemeine Funktionseigenschaften	58
2.1	Nullstellen	58
2.2	Symmetrie	59
2.3	Monotonie	59
2.4	Periodizität	60
2.5	Umkehrfunktion (inverse Funktion)	60
3	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	61
3.1	Grenzwert einer Folge	61
3.2	Grenzwert einer Funktion	62
3.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	62
3.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$	62
3.3	Rechenregeln für Grenzwerte	62
3.4	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	63
3.5	Stetigkeit einer Funktion	64
4	Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)	64
4.1	Definition der ganzrationalen Funktionen	64
4.2	Lineare Funktionen (Geraden)	65
4.2.1	Allgemeine Geradengleichung	65
4.2.2	Hauptform einer Geraden	65
4.2.3	Punkt-Steigungs-Form einer Geraden	65
4.2.4	Zwei-Punkte-Form einer Geraden	65
4.2.5	Achsenabschnittsform einer Geraden	66
4.2.6	Hessesche Normalform einer Geraden	66
4.2.7	Abstand eines Punktes von einer Geraden	66
4.2.8	Schnittwinkel zweier Geraden	66
4.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	67
4.3.1	Hauptform einer Parabel	67
4.3.2	Produktform einer Parabel	67
4.3.3	Scheitelpunktsform einer Parabel	67
4.4	Polynomfunktionen höheren Grades (n-ten Grades)	68
4.4.1	Abspaltung eines Linearfaktors	68
4.4.2	Nullstellen einer Polynomfunktion	68
4.4.3	Produktdarstellung einer Polynomfunktion	68
4.5	Horner-Schema	68
4.6	Reduzierung einer Polynomfunktion (Nullstellenberechnung)	69
4.7	Interpolationspolynome	70
4.7.1	Allgemeine Vorbetrachtungen	70
4.7.2	Interpolationsformel von Lagrange	70
4.7.3	Interpolationsformel von Newton	72
5	Gebrochenrationale Funktionen	74
5.1	Definition der gebrochenrationalen Funktionen	74
5.2	Nullstellen, Definitionslücken, Pole	74
5.3	Asymptotisches Verhalten im Unendlichen	75
6	Potenz- und Wurzelfunktionen	76
6.1	Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	76
6.2	Wurzelfunktionen	77
6.3	Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	77

7	Trigonometrische Funktionen	78
7.1	Winkelmaße	78
7.2	Definition der trigonometrischen Funktionen	79
7.3	Sinus- und Kosinusfunktion	80
7.4	Tangens- und Kotangensfunktion	80
7.5	Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	81
7.6	Trigonometrische Formeln	82
7.6.1	Additionstheoreme	82
7.6.2	Formeln für halbe Winkel	82
7.6.3	Formeln für Winkelvielfache	82
7.6.4	Formeln für Potenzen	83
7.6.5	Formeln für Summen und Differenzen	83
7.6.6	Formeln für Produkte	83
7.7	Anwendungen in der Schwingungslehre	84
7.7.1	Allgemeine Form einer Sinus- und Kosinusfunktion	84
7.7.2	Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	84
7.7.2.1	Gleichung einer harmonischen Schwingung	84
7.7.2.2	Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm	85
7.7.3	Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter harmonischer Schwingungen	86
8	Arkusfunktionen	87
8.1	Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion	87
8.2	Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion	88
8.3	Wichtige Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen	89
9	Exponentialfunktionen	89
9.1	Definition der Exponentialfunktionen	89
9.2	Spezielle Exponentialfunktionen aus den Anwendungen	90
9.2.1	Abklingfunktion	90
9.2.2	Sättigungsfunktion	91
9.2.3	Gauß-Funktion (Gaußsche Glockenkurve)	91
9.2.4	Kettenlinie	92
10	Logarithmusfunktionen	92
10.1	Definition der Logarithmusfunktionen	92
10.2	Spezielle Logarithmusfunktionen	93
11	Hyperbelfunktionen	93
11.1	Definition der Hyperbelfunktionen	93
11.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen	94
11.3	Formeln	95
11.3.1	Additionstheoreme	95
11.3.2	Formeln für halbe Argumente	95
11.3.3	Formeln für Vielfache des Arguments	96
11.3.4	Formeln für Potenzen	96
11.3.5	Formeln für Summen und Differenzen	96
11.3.6	Formeln für Produkte	97
11.3.7	Formel von Moivre	97
12	Areafunktionen	97
12.1	Definition der Areafunktionen	97
12.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Areafunktionen	98

13 Kegelschnitte	99
13.1 Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes	99
13.2 Kreis	99
13.2.1 Geometrische Definition	99
13.2.2 Mittelpunktsgleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung)	100
13.2.3 Kreis in allgemeiner Lage (Hauptform)	100
13.2.4 Parameterdarstellung eines Kreises	100
13.2.5 Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten	100
13.3 Ellipse	101
13.3.1 Geometrische Definition	101
13.3.2 Mittelpunktsgleichung einer Ellipse (Ursprungsgleichung)	101
13.3.3 Ellipse in allgemeiner Lage (Hauptform)	101
13.3.4 Parameterdarstellung einer Ellipse	101
13.3.5 Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten	102
13.4 Hyperbel	102
13.4.1 Geometrische Definition	102
13.4.2 Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel (Ursprungsgleichung)	103
13.4.3 Hyperbel in allgemeiner Lage (Hauptform)	103
13.4.4 Parameterdarstellung einer Hyperbel	103
13.4.5 Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten	103
13.4.6 Gleichung einer um 90° gedrehten Hyperbel	104
13.4.7 Gleichung einer gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel ($a = b$)	104
13.5 Parabel	105
13.5.1 Geometrische Definition	105
13.5.2 Scheitelgleichung einer Parabel	105
13.5.3 Parabel in allgemeiner Lage (Hauptform)	105
13.5.4 Parameterdarstellung einer Parabel	106
13.5.5 Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten	106
14 Spezielle Kurven	107
14.1 Gewöhnliche Zykloide (Rollkurve)	107
14.2 Epizykloide	107
14.3 Hypozykloide	108
14.4 Astroide (Sternkurve)	108
14.5 Kardioiden (Herzkurve)	109
14.6 Lemniskate (Schleifenkurve)	109
14.7 „Kleeblatt“ mit n bzw. $2n$ Blättern	109
14.8 Cartesisches Blatt	110
14.9 Strophoide	110
14.10 Spiralen	111
14.10.1 Archimedische Spirale	111
14.10.2 Logarithmische Spirale	111
IV Differentialrechnung	112
1 Differenzierbarkeit einer Funktion	112
1.1 Differenzenquotient	112
1.2 Differentialquotient oder 1. Ableitung	112
1.3 Ableitungsfunktion	112
1.4 Höhere Ableitungen	113
1.5 Differential einer Funktion	113

2	Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle)	114
3	Ableitungsregeln	115
3.1	Faktorregel	115
3.2	Summenregel	115
3.3	Produktregel	115
3.4	Quotientenregel	115
3.5	Kettenregel	116
3.6	Logarithmische Differentiation	116
3.7	Ableitung der Umkehrfunktion	117
3.8	Implizite Differentiation	117
3.9	Ableitung einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve)	118
3.10	Ableitung einer in Polarkoordinaten dargestellten Funktion (Kurve)	118
4	Anwendungen	119
4.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung	119
4.2	Tangente und Normale	119
4.3	Linearisierung einer Funktion	119
4.4	Charakteristische Kurvenpunkte	120
4.4.1	Geometrische Deutung der 1. und 2. Ableitung	120
4.4.2	Relative Extremwerte (Maxima, Minima)	120
4.4.3	Wendepunkte, Sattelpunkte	122
V	Integralrechnung	123
1	Bestimmtes Integral	123
1.1	Definition eines bestimmten Integrals	123
1.2	Berechnung eines bestimmten Integrals	124
1.3	Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale	124
2	Unbestimmtes Integral	125
2.1	Definition eines unbestimmten Integrals	125
2.2	Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale	125
2.3	Grund- oder Stammintegrale (Tabelle)	127
3	Integrationsmethoden	128
3.1	Integration durch Substitution	128
3.1.1	Allgemeines Verfahren	128
3.1.2	Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)	128
3.2	Partielle Integration (Produktintegration)	130
3.3	Integration gebrochenrationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung	131
3.3.1	Partialbruchzerlegung	131
3.3.2	Integration der Partialbrüche	133
3.4	Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	134
3.5	Numerische Integration	135
3.5.1	Trapezformel	135
3.5.2	Simpsonsche Formel	135
3.5.3	Romberg-Verfahren	137

4 Uneigentliche Integrale	140
4.1 Unendliches Integrationsintervall	140
4.2 Integrand mit Pol	140
5 Anwendungen	141
5.1 Integration der Bewegungsgleichung	141
5.2 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral)	141
5.3 Lineare und quadratische Mittelwerte	142
5.3.1 Linearer Mittelwert	142
5.3.2 Quadratischer Mittelwert	142
5.3.3 Zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion	142
5.4 Flächeninhalt	142
5.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	144
5.6 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	144
5.7 Bogenlänge einer ebenen Kurve	145
5.8 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)	146
5.9 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	147
5.10 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	147
5.11 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	148
VI Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen	150
1 Unendliche Reihen	150
1.1 Grundlegende Begriffe	150
1.1.1 Definition einer unendlichen Reihe	150
1.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	150
1.2 Konvergenzkriterien	151
1.2.1 Quotientenkriterium	151
1.2.2 Wurzelkriterium	151
1.2.3 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	151
1.3 Spezielle konvergente Reihen	152
2 Potenzreihen	153
2.1 Definition einer Potenzreihe	153
2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich einer Potenzreihe	153
2.3 Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen	154
3 Taylor-Reihen	154
3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel	154
3.1.1 Taylorsche Formel	154
3.1.2 Mac Laurinsche Formel	155
3.2 Taylorsche Reihe	155
3.3 Mac Laurinsche Reihe	155
3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle)	156
3.5 Näherungspolynome einer Funktion (mit Tabelle)	158
4 Fourier-Reihen	160
4.1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	160
4.2 Anwendung: Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung	162
4.3 Spezielle Fourier-Reihen (Tabelle)	163

VII Lineare Algebra	166
1 Matrizen	166
1.1 Grundlegende Begriffe	166
1.1.1 Definition einer Matrix	166
1.1.2 Spezielle Matrizen	166
1.1.3 Gleichheit von Matrizen	167
1.2 Spezielle quadratische Matrizen	167
1.2.1 Diagonalmatrix	167
1.2.2 Einheitsmatrix	167
1.2.3 Dreiecksmatrix	167
1.2.4 Symmetrische Matrix	167
1.2.5 Schiefsymmetrische Matrix	168
1.2.6 Orthogonale Matrix	168
1.3 Rechenoperationen für Matrizen	168
1.3.1 Addition und Subtraktion von Matrizen	168
1.3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	168
1.3.3 Multiplikation von Matrizen	169
1.4 Reguläre Matrix	170
1.5 Inverse Matrix	170
1.5.1 Definition einer inversen Matrix	170
1.5.2 Berechnung einer inversen Matrix	170
1.5.2.1 Berechnung der inversen Matrix A^{-1} unter Verwendung von Unterdeterminanten	170
1.5.2.2 Berechnung der inversen Matrix A^{-1} nach dem Gaußschen Algorithmus	171
1.6 Rang einer Matrix	172
1.6.1 Definitionen	172
1.6.1.1 Unterdeterminanten einer Matrix	172
1.6.1.2 Rang einer Matrix	172
1.6.1.3 Elementare Umformungen einer Matrix	172
1.6.2 Rangbestimmung einer Matrix	172
1.6.2.1 Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A unter Verwendung von Unterdeterminanten	172
1.6.2.2 Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A mit Hilfe elementarer Umformungen	173
2 Determinanten	173
2.1 Zweireihige Determinanten	174
2.2 Dreireihige Determinanten	174
2.3 Determinanten höherer Ordnung	175
2.3.1 Unterdeterminante D_{ik}	175
2.3.2 Algebraisches Komplement (Adjunkte) A_{ik}	175
2.3.3 Definition einer n -reihigen Determinante	175
2.4 Laplacescher Entwicklungssatz	176
2.5 Rechenregeln für n -reihige Determinanten	176
2.6 Regeln zur praktischen Berechnung einer n -reihigen Determinante ($n > 3$)	178
2.6.1 Elementare Umformungen einer n -reihigen Determinante	178
2.6.2 Reduzierung und Berechnung einer n -reihigen Determinante	178
3 Lineare Gleichungssysteme	179
3.1 Grundlegende Begriffe	179
3.1.1 Definition eines linearen Gleichungssystems	179
3.1.2 Spezielle lineare Gleichungssysteme	179

3.2	Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Gleichungssystems	180
3.2.1	Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen (m, n) -Systems $Ax = c$	180
3.2.2	Lösungsmenge eines linearen (m, n) -Systems $Ax = c$	180
3.3	Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	181
3.4	Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus)	182
3.4.1	Äquivalente Umformungen eines linearen (m, n) -Systems	182
3.4.2	Gaußscher Algorithmus	182
3.5	Cramersche Regel	184

VIII Komplexe Zahlen und Funktionen

1	Darstellungsformen einer komplexen Zahl	185
1.1	Algebraische oder kartesische Form	185
1.2	Polarformen	186
1.2.1	Trigonometrische Form	186
1.2.2	Exponentialform	186
1.3	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	187
1.3.1	Polarform $\rightarrow$ Kartesische Form	187
1.3.2	Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform	187
2	Grundrechenarten für komplexe Zahlen	188
2.1	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	188
2.2	Multiplikation komplexer Zahlen	188
2.3	Division komplexer Zahlen	189
3	Potenzieren	190
4	Radizieren (Wurzelziehen)	191
5	Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl	192
6	Ortskurven	193
6.1	Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen	193
6.2	Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl	193
6.3	Inversion einer Ortskurve	193
7	Komplexe Funktionen	194
7.1	Definition einer komplexen Funktion	194
7.2	Definitionsgleichungen einiger elementarer Funktionen	194
7.2.1	Exponentialfunktion (e-Funktion)	194
7.2.2	Trigonometrische Funktionen	195
7.2.3	Hyperbelfunktionen	195
7.3	Wichtige Beziehungen und Formeln	195
7.3.1	Eulersche Formeln	195
7.3.2	Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen e-Funktion	195
7.3.3	Trigonometrische und Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument	195
7.3.4	Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbel- funktionen für komplexes Argument	196
7.3.5	Arkus- und Arefunktionen mit imaginärem Argument	196

8	Anwendungen in der Schwingungslehre	196
8.1	Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger	196
8.2	Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen	197

IX Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

1	Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung	199
1.1	Definition einer Funktion von mehreren Variablen	199
1.2	Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen	199
1.2.1	Analytische Darstellung	199
1.2.2	Graphische Darstellung	200
1.2.2.1	Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	200
1.2.2.2	Schnittkurvendiagramme	200
1.2.2.3	Höhenliniendiagramm	200
1.3	Spezielle Flächen (Funktionen)	201
1.3.1	Ebenen	201
1.3.2	Rotationsflächen	202
1.3.2.1	Gleichung einer Rotationsfläche	202
1.3.2.2	Spezielle Rotationsflächen	202
2	Partielle Differentiation	204
2.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	204
2.1.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x; y)$	204
2.1.2	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$	205
2.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	205
2.3	Totales oder vollständiges Differential einer Funktion	206
2.4	Anwendungen	208
2.4.1	Linearisierung einer Funktion	208
2.4.2	Relative Extremwerte (Maxima, Minima)	209
3	Mehrfachintegrale	210
3.1	Doppelintegrale	210
3.1.1	Definition eines Doppelintegrals	210
3.1.2	Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten	211
3.1.3	Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten	213
3.1.4	Anwendungen	214
3.1.4.1	Flächeninhalt	214
3.1.4.2	Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	214
3.1.4.3	Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	215
3.2	Dreifachintegrale	216
3.2.1	Definition eines Dreifachintegrals	216
3.2.2	Berechnung eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten	217
3.2.3	Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten	219

3.2.4	Anwendungen	219
3.2.4.1	Volumen eines zylindrischen Körpers	219
3.2.4.2	Schwerpunkt eines homogenen Körpers	220
3.2.4.3	Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	221
4	Linien- oder Kurvenintegrale	222
4.1	Vektorfelder	222
4.2	Definition eines Linienintegrals	222
4.2.1	Linienintegral in der Ebene	222
4.2.2	Linienintegral im Raum	224
4.3	Wegunabhängigkeit eines Linienintegrals	224
4.4	Arbeitsintegral	225

X Gewöhnliche Differentialgleichungen 226

1	Grundlegende Begriffe	226
1.1	Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung	226
1.2	Lösungen einer Differentialgleichung	226
1.3	Anfangswertprobleme	226
1.4	Randwertprobleme	227
2	Differentialgleichungen 1. Ordnung	227
2.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen	227
2.2	Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch Substitutionen lösbar sind (Tabelle)	228
2.3	Exakte Differentialgleichungen 1. Ordnung	228
2.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	230
2.4.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	230
2.4.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	230
2.4.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	230
2.4.3.1	Integration durch Variation der Konstanten	230
2.4.3.2	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	231
2.4.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	231
2.5	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	233
2.5.1	Streckenzugverfahren von Euler	233
2.5.2	Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung	234
2.5.3	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	236
3	Differentialgleichungen 2. Ordnung	239
3.1	Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen (Tabelle)	239
3.2	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	240
3.2.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	240
3.2.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	240
3.2.2.1	Wronski-Determinante	240
3.2.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen Differential- gleichung	240
3.2.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	241
3.3	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung	244

4	Anwendungen	247
4.1	Mechanische Schwingungen	247
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	247
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung	247
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung	248
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	248
4.1.3.2	Aperiodischer Grenzfall	249
4.1.3.3	Aperiodische Schwingung (Kriechfall)	249
4.1.4	Erzwungene Schwingung	250
4.1.4.1	Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung	250
4.1.4.2	Stationäre Lösung	250
4.2	Elektromagnetische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis	252

XI Fehler- und Ausgleichsrechnung 253

1	Gaußsche Normalverteilung	253
2	Mittelwert und mittlerer Fehler einer Meßreihe	254
3	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz	255
3.1	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen	255
3.2	Fehlerfortpflanzungsgesetze für spezielle Funktionen von zwei unabhängigen Variablen (Tabelle)	257
3.3	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von n unabhängigen Variablen	257
4	Ausgleichskurven	258
4.1	Ausgleichung nach dem Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadrate	258
4.2	Ausgleichs- oder Regressionsgerade	259

XII Laplace-Transformation 261

1	Grundlegende Begriffe	261
2	Allgemeine Eigenschaften der Laplace-Transformation	262
2.1	Linearität (Satz über Linearkombinationen)	262
2.2	Ähnlichkeitssatz	263
2.3	Verschiebungssätze	264
2.4	Dämpfungssatz	265
2.5	Ableitungssätze	266
2.5.1	Ableitungssatz für die Originalfunktion	266
2.5.2	Ableitungssatz für die Bildfunktion	267
2.6	Integralsätze	267
2.6.1	Integralsatz für die Originalfunktion	267
2.6.2	Integralsatz für die Bildfunktion	268
2.7	Faltungssatz	269
2.8	Grenzwertsätze	270

3	Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion	271
4	Laplace-Transformierte spezieller Funktionen (Impulse)	272
5	Anwendung: Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	278
5.1	Allgemeines Lösungsverfahren	278
5.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	279
5.3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	280
6	Tabelle spezieller Laplace-Transformationen	281

Anhang: Integraltafel 287

1	Integrale mit $ax + b$	288
2	Integrale mit $ax + b$ und $px + q$	289
3	Integrale mit $a^2 + x^2$	290
4	Integrale mit $a^2 - x^2$	291
5	Integrale mit $ax^2 + bx + c$	292
6	Integrale mit $a^3 \pm x^3$	294
7	Integrale mit $a^4 + x^4$	294
8	Integrale mit $a^4 - x^4$	295
9	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$	295
10	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $px + q$	296
11	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $\sqrt{px + q}$	297
12	Integrale mit $\sqrt{a^2 + x^2}$	297
13	Integrale mit $\sqrt{a^2 - x^2}$	299
14	Integrale mit $\sqrt{x^2 - a^2}$	300
15	Integrale mit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$	302
16	Integrale mit $\sin(ax)$	304
17	Integrale mit $\cos(ax)$	305
18	Integrale mit $\sin(ax)$ und $\cos(ax)$	307
19	Integrale mit $\tan(ax)$	310
20	Integrale mit $\cot(ax)$	310
21	Integrale mit einer Arkusfunktion	311
22	Integrale mit e^{ax}	312
23	Integrale mit $\ln x$	313
24	Integrale mit $\sinh(ax)$	314
25	Integrale mit $\cosh(ax)$	315
26	Integrale mit $\sinh(ax)$ und $\cosh(ax)$	316
27	Integrale mit $\tanh(ax)$	317
28	Integrale mit $\coth(ax)$	317
29	Integrale mit einer Areafunktion	318

Sachwortverzeichnis 319