

Inhaltsverzeichnis

1. Das Ziel	
1.1 Ordnung und Unordnung: Typische Erscheinungen	1
1.2 Einige charakteristische Problemstellungen	12
1.3 Wie wir vorgehen	16
2. Wahrscheinlichkeit	
2.1 Das Objekt unserer Untersuchungen: die Ergebnismenge	19
2.2 Zufallsvariable	22
2.3 Wahrscheinlichkeit	23
2.4 Verteilungen	24
2.5 Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsdichten	26
2.6 Die Verbundwahrscheinlichkeit	29
2.7 Erwartungswerte $E(X)$, Momente	31
2.8 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	32
2.9 Unabhängige und abhängige Zufallsvariable	34
2.10* Erzeugende Funktionen und charakteristische Funktionen	35
2.11 Eine spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilung: die Binomialverteilung	37
2.12 Die Poisson-Verteilung	40
2.13 Die Normalverteilung (Gauss-Verteilung)	42
2.14 Die Stirlingsche Formel	44
2.15* Der zentrale Grenzwertsatz	44
3. Information	
3.1 Grundlegende Ideen	47
3.2* Informationsgewinn. Eine anschauliche Herleitung	52
3.3 Informationsentropie und Nebenbedingungen	55
3.4 Ein Beispiel der Physik: Die Thermodynamik	61
3.5* Ein Zugang zur irreversiblen Thermodynamik	64
3.6 Die Entropie – Fluch der statistischen Mechanik?	74
4. Der Zufall	
4.1 Ein Modell für die Brownsche Bewegung	77
4.2 Die Zufallsbewegung und ihre Master-Gleichung	83
4.3* Verbundwahrscheinlichkeit und Wege. Markov-Prozesse. Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung	88
4.3.1 Ein Beispiel für die Verbundwahrscheinlichkeit: das Wegintegral als Lösung der Diffusionsgleichung	92

4.4*	Über den Gebrauch von Verbundwahrscheinlichkeiten. Momente. Die charakteristische Funktion. Gauss-Prozesse	94
4.5	Die Master-Gleichung	97
4.6	Die exakte stationäre Lösung der Master-Gleichung für Systeme in detaillierter Bilanz	99
4.7*	Die Master-Gleichung bei detaillierter Bilanz. Symmetrisierung, Eigenwerte und Eigenzustände	102
4.8*	Die Kirchhoffsche Methode zur Lösung der Master-Gleichung ..	105
4.9*	Theoreme zu Lösungen der Master-Gleichung	108
4.10	Die Bedeutung von Zufallsprozessen. Stationärer Zustand, Fluktuationen, Wiederkehrzeit	109
4.11*	Master-Gleichung und Grenzen der irreversiblen Thermodynamik	113
5.	Notwendigkeit	
5.1	Dynamische Prozesse	115
5.1.1	Ein Beispiel: der überdämpfte anharmonische Oszillator	115
5.1.2	Grenzzyklen	121
5.1.3	Weiche und harte Moden, weiche und harte Anregung	122
5.2*	Kritische Punkte und Trajektorien in der Phasenebene. Grenzzyklen	123
5.3*	Stabilität	131
5.3.1	Lokales Kriterium	133
5.3.2	Globale Stabilität (Ljapunov-Funktion)	135
5.4	Beispiele und Aufgaben zu Bifurkation und Stabilität	138
5.5*	Klassifikation von statischen Instabilitäten – ein elementarer Zugang zur Thomschen Katastrophentheorie	145
5.5.1	Der eindimensionale Fall	145
5.5.2	Der zweidimensionale Fall	150
5.5.3	Der n -dimensionale Fall	156
6.	Zufall und Notwendigkeit	
6.1	Die Langevin-Gleichungen: ein Beispiel	159
6.2*	Reservoir und Zufallskräfte	165
6.3	Die Fokker-Planck-Gleichung	171
6.3.1	Die völlig deterministische Bewegung	171
6.3.2	Ableitung der Fokker-Planck-Gleichung, eindimensionale Bewegung	174
6.4	Einige Eigenschaften und stationäre Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung	179
6.4.1	Die Fokker-Planck-Gleichung als Kontinuitätsgleichung	179
6.4.2	Stationäre Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung	180
6.4.3	Beispiele	181
6.5	Zeitabhängige Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung	186
6.5.1	Ein wichtiger Spezialfall: ein eindimensionales Beispiel	186
6.5.2	Die Reduktion der zeitabhängigen Fokker-Planck-Gleichung auf eine zeitunabhängige Gleichung	188

6.5.3	Eine formale Lösung	189
6.5.4*	Ein Iterationsverfahren	190
6.6*	Die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung mittels Wegintegralen	190
6.6.1	Der eindimensionale Fall	190
6.6.2	Der n -dimensionale Fall	193
6.7	Die Analogie zu Phasenübergängen	193
6.8	Die Analogie zu Phasenübergängen in kontinuierlichen Medien: ortsabhängige Ordnungsparameter	201
7.	Selbstorganisation	
7.1	Organisation	207
7.2	Selbstorganisation	211
7.3	Die Rolle der Fluktuationen: Zuverlässigkeit oder Anpassungs- fähigkeit? Schaltung	217
7.4*	Adiabatische Elimination der schnell relaxierenden Variablen aus der Fokker-Planck-Gleichung	219
7.5*	Adiabatische Elimination der schnell relaxierenden Variablen aus der Master-Gleichung	222
7.6	Selbstorganisation in räumlich ausgedehnten Medien. Eine Dar- stellung der mathematischen Methoden	223
7.7*	Die verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichungen für Nicht- gleichgewichtsphasenübergänge	224
7.8*	Beiträge höherer Ordnung zu den verallgemeinerten Ginzburg- Landau-Gleichungen	232
8.	Systeme der Physik	
8.1	Kooperative Effekte beim Laser: Selbstorganisation und Phasen- übergang	235
8.2	Die Lasergleichungen im Modenbild	236
8.2.1	Feldgleichungen	236
8.2.2	Materiegleichungen	237
8.3	Das Ordnungsparameter-Konzept	237
8.4	Der Einmodenlaser	238
8.5	Der Vielmodenlaser	242
8.6	Laser mit kontinuierlich vielen Moden. Die Analogie zur Supra- leitung	244
8.7	Phasenübergänge erster Ordnung beim Einmodenlaser	246
8.7.1	Der Einmodenlaser mit vorgegebenem äußeren Signal	247
8.7.2	Der Einmodenlaser mit sättigbarem Absorber	249
8.7.3	Höhere Instabilitäten	250
8.8	Instabilitäten in der Flüssigkeitsdynamik: das Bénard- und das Taylor-Problem	251
8.9	Die Grundgleichungen	252
8.10	Gedämpfte und neutrale Lösungen	255
8.11	Die Lösung in der Umgebung $R = R_c$ (nichtlinearer Bereich). Die effektiven Langevin-Gleichungen	257
8.12	Die Fokker-Planck-Gleichung und ihre stationäre Lösung	260

8.13	Ein Modell für die statistische Dynamik der Gunn-Instabilität nahe der Schwelle	264
8.14	Elastische Stabilität: Skizze einiger grundlegender Ideen	269
9.	Systeme der Chemie und Biochemie	
9.1	Chemische und biochemische Reaktionen	275
9.2	Deterministische Prozesse ohne Diffusion in einer Variablen ...	275
9.3	Reaktions- und Diffusions-Gleichungen	280
9.4	Ein Reaktions-Diffusions-Modell mit zwei oder drei Variablen: der Brusselator und der Oregonator	283
9.5	Stochastisches Modell für eine chemische Reaktion ohne Diffusion. Geburts- und Todesprozesse. Eine Variable	290
9.6	Stochastisches Modell für eine chemische Reaktion mit Diffusion. Eine Variable	295
9.7*	Die stochastische Behandlung des Brusselators in der Umgebung seiner Instabilität, die mit einer weichen Mode verknüpft ist	300
9.8	Chemische Netzwerke	303
10.	Anwendungen in der Biologie	
10.1	Ökologie, Populationsdynamik	307
10.1.1	Wettbewerb und Koexistenz	308
10.1.2	Die Räuber-Beute-Beziehung	310
10.1.3	Die Symbiose	311
10.1.4	Einige allgemeine Bemerkungen	311
10.2	Stochastisches Modell für ein Räuber-Beute-System	312
10.3	Ein einfaches mathematisches Modell für evolutionäre Vorgänge sowie die Grundidee von Eigens Hyperzyklus	313
10.4	Ein Modell zur Morphogenese	315
10.5	Ordnungsparameter und Morphogenese	318
10.6	Einige Bemerkungen zu den Modellen der Morphogenese	329
11.	Soziologie und Wirtschaftswissenschaften	
11.1	Ein stochastisches Modell zur öffentlichen Meinungsbildung ..	333
11.2	Ein Ratengleichungsmodell zur öffentlichen Meinungsbildung ..	336
11.3	Phasenübergänge in der Wirtschaft	337
12.	Chaos	
12.1	Was ist Chaos?	341
12.2	Das Lorenz-Modell – seine Begründung und Realisierung	342
12.3	Wie Chaos entsteht	344
12.4	Chaos und das Versagen des Versklavungsprinzips	350
12.5	Korrelationsfunktion und Frequenzverteilung	351
12.6	Weitere Beispiele zu chaotischen Bewegungen	354
13.	Historische Bemerkungen und Ausblick	355
	Referenzen, weitere Literatur und Bemerkungen	359
	Sachverzeichnis	375