

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Metrische Räume. Topologische Grundbegriffe	1
1.1 Der n -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ 6 • 1.2 Konvergenz 8 • 1.3 Die Regeln von de Morgan 10 • 1.4 Äquivalenzrelation 10 • 1.5 Metrischer Raum 11 • 1.6 Konvergenz und Vollständigkeit 12 • 1.7 Normierter Raum und Banachraum 15 • 1.8 Die Maximumnorm 17 • 1.9 Innenproduktraum und Hilbertraum 19 • 1.10 Der Hilbertsche Folgenraum l^2 20 • 1.11 Innerer Punkt, Randpunkt, Häufungspunkt 21 • 1.12 Offene und abgeschlossene Mengen 22 • 1.13 Satz über Inneres, Rand und abgeschlossene Hülle 23 • 1.14 Charakterisierung der abgeschlossenen Hülle 24 • 1.15 Metrischer Teilraum 25 • 1.16 Kompakte Mengen 25 • 1.17 Abstand zwischen Mengen. Umgebungen von Mengen 26 • 1.18 Orthogonalität und Winkel im $\mathbb{R}^n$ 28 • 1.19 Unterräume und Ebenen im $\mathbb{R}^n$ 29 • 1.20 Gerade, Strecke, Polygonzug 30 • 1.21 Hyperebenen und Halbräume 31 • 1.22 Konvexe Mengen 32 • 1.23 Konvexe Funktionen 35 • Aufgaben 35	
§ 2. Grenzwert und Stetigkeit	39
2.1 Grenzwert und Stetigkeit 41 • 2.2 Schwankung einer Funktion. Limes superior und Limes inferior 45 • 2.3 Stetigkeitsmodul 46 • 2.4 Komposition stetiger Funktionen 46 • 2.5 Stetige vektor- und skalarwertige Funktionen 47 • 2.6 Polynome in mehreren Veränderlichen 48 • 2.7 Stetigkeit bezüglich einzelner Veränderlichen 48 • 2.8 Lineare Abbildungen 49 • 2.9 Stetigkeit und Kompaktheit 51 • 2.10 Extremwerte bezüglich einzelner Variablen 52 • 2.11 Satz über die gleichmäßige Stetigkeit 53 • 2.12 Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion 54 • 2.13 Das Halbierungsverfahren 54 • 2.14 Offene Überdeckungen kompakter Mengen 57 • 2.15 Gleichmäßige Konvergenz 58 • 2.16 Satz von Dini 59 • 2.17 Weierstraßsches Majorantenkriterium 59 • 2.18 Potenzreihen in mehreren Veränderlichen 59 • 2.19 Fortsetzung stetiger Funktionen 61 • 2.20 Landau-Symbole 64 • Aufgaben 65	
§ 3. Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen	68
3.1 Partielle Ableitungen. Gradient 70 • 3.2 Graphische Darstellung einer Funktion. Höhenlinien 72 • 3.3 Vertauschung der Reihenfolge der Differentiation 75 • 3.4 Der allgemeine Fall 76 • 3.5 Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante 78 • 3.6 Höhere Ableitungen. Die Klassen C^k 79 • 3.7 Lineare Differentialoperatoren 80 • 3.8 Differenzierbarkeit und vollständiges Differential 81 • 3.9 Satz 83 • 3.10 Die Kettenregel 85 • 3.11 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 87 • 3.12 Richtungsableitungen 89 • 3.13 Der Satz von Taylor 90 • 3.14 Das Taylorpolynom 93 • 3.15 Die Taylorsche Reihe 94 • 3.16 Fläche und Tangentialhyperebene 96 • 3.17 Die Hessematrix 99 • 3.18 Differentiation im Komplexen. Holomorphie 100 • 3.19 Cauchy-Riemannsche	

Differentialgleichungen. Satz 101 * 3.20 Bewegung, winkeltreue und konforme Abbildung 102 * Aufgaben 103

§ 4. Implizite Funktionen. Maxima und Minima 106

4.1 Fixpunkte kontrahierender Abbildungen 106 * 4.2 Einige Hilfsmittel. Lipschitzbedingung im $\mathbb{R}^n$ 109 * 4.3 Das Newton-Verfahren 111 * 4.4 Implizite Funktionen 111 * 4.5 Satz über implizite Funktionen 114 * 4.6 Umkehrabbildungen. Diffeomorphismen 118 * 4.7 Offene Abbildungen 121 * 4.8 Quadratische Formen 122 * 4.9 Maxima und Minima 124 * 4.10 Das Fermatsche Kriterium für lokale Extrema 124 * 4.11 Hinreichende Bedingung für ein Extremum 125 * 4.12 Extrema mit Nebenbedingungen 128 * 4.13 Lagrangesche Multiplikatorenregel 130 * 4.14 Corollar (Lagrangesche Multiplikatorenregel) 131 * 4.15 Lokale Klassifikation von glatten Funktionen 133 * 4.16 Lemma von Marston Morse 135 * Aufgaben 138

§ 5. Allgemeine Limestheorie. Wege und Kurven 142

5.1 Gerichtete Menge und Netz 142 * 5.2 Der Grenzwert eines Netzes 143 * 5.3 Konvergenzkriterium von Cauchy 145 * 5.4 Reellwertige Netze 145 * 5.5 Monotone Netze 146 * 5.6 Das Riemann-Integral als Netzlimit 146 * 5.7 Netzlimit für Teilintervalle 147 * 5.8 Konfinale Teilfolgen 148 * 5.9 Metrische Ordnung und Riemannsche Summendefinition des Integrals 149

Wege und Kurven 151

5.10 Weg und Kurve 153 * 5.11 Die Weglänge 160 * 5.12 Die Weglänge als Funktion von t 161 * 5.13 Äquivalente Darstellungen, Orientierung 163 * 5.14 Die Länge einer Kurve 164 * 5.15 Die Bogenlänge als Parameter 168 * 5.16 Tangente und Normalebene 169 * 5.17 Ebene Kurven, positive Normalen 170 * 5.18 Krümmung und Krümmungsradius 171 * 5.19 Ebene Kurven 174 * 5.20 Funktionen von beschränkter Variation 175 * 5.21 Darstellungssatz von C. Jordan 177 * 5.22 Satz über Rektifizierbarkeit 177 * 5.23 Die Bewegungsgleichungen 178 * 5.24 Die Lösung des Zweikörperproblems 179 * 5.25 Satz über das Zweikörperproblem 182 * 5.26 Eindeutigkeitssatz 184 * 5.27 Historisches zu den Keplerschen Gesetzen 184 * Aufgaben 186

§ 6. Das Riemann-Stieltjes-Integral. Kurven- und Wegintegrale 190

6.1 Das Riemann-Stieltjes-Integral 191 * 6.2 Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals 192 * 6.3 Partielle Integration. Satz 193 * 6.4 Transformation in ein Riemann-Integral. Satz 194 * 6.5 Weitere Beispiele 194 * 6.6 Bemerkungen 195 * 6.7 Mittelwertsätze für Riemann-Stieltjes-Integrale 197 * 6.8 Zweiter Mittelwertsatz für Riemannsche Integrale 197 * 6.9 Kurvenintegrale bezüglich der Bogenlänge 198 * 6.10 Eigenschaften von Kurvenintegralen 199 * 6.11 Anwendungen 199 * 6.12 Wegintegrale 201 * 6.13 Eigenschaften und Rechenregeln für Wegintegrale 202 * 6.14 Vektorfelder 203 * 6.15 Bewegung in einem Kraftfeld 204 * 6.16 Gradientenfelder. Stammfunktion und Potential 206 * 6.17 Die Integrabilitätsbedingung 208 * 6.18 Nochmals Kraftfelder 212 * 6.19 Komplexe Wegintegrale 213 * 6.20 Integralsatz von Cauchy 214 * 6.21 Satz über Stammfunktionen 215 * Aufgaben 216

§ 7. Jordanscher Inhalt und Riemannsches Integral im $\mathbb{R}^n$ 218

7.1 Anforderungen an den Inhaltsbegriff 219 * 7.2 Zerlegungen eines Intervalls 220 * 7.3 Intervallsummen 222 * 7.4 Äußerer und innerer Inhalt. Jordan-

Inhalt 223 * 7.5 Würfelsummen 225 * 7.6 Quadrierbare Mengen. Satz 226
 * 7.7 Produktmengen 227 * 7.8 Abbildungen von Mengen 228 * 7.9 Lineare
 Abbildungen 229

Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$ 231

7.10 Definition und einfache Eigenschaften des Integrals 232 * 7.11 Satz
 über gliedweise Integration 237 * 7.12 Jordanscher Inhalt und Riemannsches
 Integral 238 * 7.13 Die Riemannsche Summendefinition des Integrals 239 *
 7.14 Parameterabhängige Integrale 241 * 7.15 Iterierte Integrale. Der Satz von
 Fubini 243 * 7.16 Das Cavalierische Prinzip 245 * 7.17 Die Abbildung von
 Gebieten. Das Lemma von Sard 246 * 7.18 Transformation von Integralen. Die
 Substitutionsregel 247 * 7.19 Beispiele 250 * 7.20 Uneigentliche Integrale 255
 * 7.21 Beispiele 256 * 7.22 Die Faltung 258 * 7.23 Approximation durch C^∞ -
 Funktionen. Mittelwerte 261 * 7.24 Der Weierstraßsche Approximationssatz
 263 * 7.25 Masse und Schwerpunkt 265 * 7.26 Potential einer Massenbelegung
 266 * 7.27 Rotationssymmetrische Massenbelegungen 268 * Aufgaben 273

§ 8. Die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes 277

8.1 Gaußscher Integralsatz in der Ebene 278 * 8.2 Vektorprodukt und Parallelo-
 gramfläche 281 * 8.3 Flächen im $\mathbb{R}^3$ 283 * 8.4 Der Inhalt einer Fläche im
 $\mathbb{R}^3$ 286 * 8.5 Oberflächenintegrale 289 * 8.6 Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ 291
 * 8.7 Physikalische Bedeutung des Gaußschen Satzes. Geschwindigkeitsfelder
 294 * 8.8 Gramsche Matrizen und Determinanten 296 * 8.9 Der Inhalt von
 m -dimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^n$ 297 * 8.10 Der Fall $m = n - 1$ 299 * 8.11 Die
 Rotation eines Vektorfeldes 301 * 8.12 Der Satz von Stokes 301 * Aufgaben
 305

§ 9. Das Lebesgue-Integral 308

9.1 Mathematische Vorbereitung. Das Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$ 311 * 9.2 Intervalle 313
 * 9.3 Mengen. Algebren und σ -Algebren 314 * 9.4 Das äußere Lebesgue-
 Maß 315 * 9.5 Das Lebesguesche Maß 317 * 9.6 Offene Mengen und G_δ -
 Mengen 320 * 9.7 Das Lebesguesche Integral im $\mathbb{R}^n$ 321 * 9.8 Nichtnegative
 Funktionen 325 * 9.9 Meßbare Funktionen 326 * 9.10 Treppenfunktionen und
 Elementarfunktionen 327 * 9.11 Meßbarkeit und Integrierbarkeit 329 * 9.12
 Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{C}$ 330 * 9.13 Satz von Beppo Levi 331
 * 9.14 Satz von der majorisierten Konvergenz 332 * 9.15 Lemma von Fatou
 333 * 9.16 Das Prinzip von Cavalieri 333 * 9.17 Die Produktformel 334 * 9.18
 Satz von Fubini (1. Form) 335 * 9.19 Die Substitutionsregel 336 * 9.20 Die
 L^p -Räume 337 * 9.21 Dichtesatz 340

Das Lebesgue-Integral in $\mathbb{R}$ 341

9.22 Absolutstetige Funktionen 341 * 9.23 Hauptsatz der Differential- und
 Integralrechnung 342 * 9.24 Überdeckungssatz von Vitali 342 * 9.25 Satz 344
 * 9.26 Satz 344 * 9.27 Satz 345 * 9.28 Abschluß des Beweises 346 * 9.29 Satz
 347 * 9.30 Partielle Integration 348 * 9.31 Die Substitutionsregel für $n = 1$ 348
 * 9.32 Ausblicke 348 * Aufgaben 349

§ 10. Fourierreihen 354

10.1 Trigonometrische Reihe und Fourierreihe 358 * 10.2 Satz von Riemann-
 Lebesgue 361 * 10.3 Satz 361 * 10.4 Konvergenzsatz 362 * 10.5 Konvergenz-
 satz für Sprungstellen 363 * 10.6 Gerade und ungerade Fortsetzung 364 * 10.7
 Umrechnung auf andere Periodenlängen 364 * 10.8 Riemannscher Lokalisati-
 onssatz 365 * 10.9 Gleichmäßige Konvergenz. Satz 365

Die Hilbertraumtheorie der Fourierreihen 366

10.10 Orthonormalfolgen im Hilbertraum 366 * 10.11 Fourierreihen bezüglich einer Orthonormalfolge 367 * 10.12 Konvergenzatz 368 * 10.13 Vollständigkeit einer Orthonormalfolge 368 * 10.14 Der Hilbertraum L^2_π 369 * 10.15 Satz 370 * 10.16 Nochmals Absolutkonvergenz 371 * Aufgaben 372

Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben	374
Literatur	383
Bezeichnungen	384
Namen- und Sachverzeichnis	386