

# INHALTSVERZEICHNIS

Verzeichnis häufig verwendeter Symbole . . . . .	XIV
--	-----

## Erster Abschnitt

### Mengenlehre

#### Mengenalgebra

1. Menge und Element . . . . .	1
2. Teilmengen. Vereinigung und Durchschnitt . . . . .	4
3. Geordnete Paare. Kartesisches Produkt . . . . .	10
4. Relationen . . . . .	12
5. Äquivalenzrelationen . . . . .	15
6. Eindeutige Relationen (Funktionen, Abbildungen) . . . . .	18
7. Gleichmächtigkeit von Mengen. Endliche und abzählbare Mengen . . . . .	23
8. Familien . . . . .	29
9. Vereinigung und Durchschnitt einer Mengenfamilie . . . . .	32
10. Kartesisches Produkt einer Mengenfamilie . . . . .	39
11. Spezielle Mengensysteme . . . . .	43

#### Geordnete Mengen

12. Halbordnung und Ordnung . . . . .	49
13. Wohlordnung . . . . .	53
14. Ähnlichkeit von geordneten Mengen . . . . .	57
15. Der Wohlordnungssatz und das Lemma von Zorn . . . . .	61

#### Kardinalzahlen und Ordinalzahlen

16. Die Kardinalzahlen und ihre Vergleichung . . . . .	65
17. Das Rechnen mit Kardinalzahlen . . . . .	71
18. Ordnungstypen . . . . .	79
19. Ordinalzahlen . . . . .	81
20. Zahlklassen . . . . .	90

# Inhaltsverzeichnis

## Zweiter Abschnitt

### Das Lebesguesche Maß

#### Vorbemerkungen über den Riemannschen Inhalt

21. Endliche Intervallsysteme. Figuren . . . . .	93
22. Elementarinhalt einer Figur . . . . .	97
23. Äußerer und innerer Inhalt einer beschränkten Punktmenge . . . . .	99
24. Riemannscher Inhalt einer beschränkten Punktmenge . . . . .	105

#### Das Lebesguesche Maß

25. Abzählbare Intervallsysteme. Borelsche Mengen . . . . .	110
26. Äußeres und inneres Maß einer Punktmenge . . . . .	113
27. Lebesguesches Maß einer Punktmenge . . . . .	123
28. Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes . . . . .	128
29. Weitere Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes . . . . .	133

#### Allgemeine Theorie des Maßes

30. Allgemeiner Inhaltsbegriff . . . . .	139
31. Allgemeiner Maßbegriff . . . . .	141
32. Äußeres Maß und Maß . . . . .	145
33. Prämaß und Maß . . . . .	146

## Dritter Abschnitt

### Das Lebesguesche Integral

#### Meßbare Funktionen

34. Begriff der meßbaren Funktion . . . . .	155
35. Sätze über meßbare Funktionen . . . . .	157
36. Folgen meßbarer Funktionen . . . . .	161
37. Die Struktur meßbarer Funktionen . . . . .	171

#### Definition des Lebesgueschen Integrals

38. Das obere und untere Lebesguesche Integral einer beschränkten Funktion . . . . .	176
39. Das Lebesguesche Integral einer beschränkten Funktion . . . . .	178
40. Das Lebesguesche Integral einer meßbaren Funktion . . . . .	183

#### Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals

41. Integrationsregeln für Treppenfunktionen . . . . .	190
42. Integrationsregeln für beliebige meßbare Funktionen . . . . .	195
43. Folgen integrierbarer Funktionen . . . . .	204

## Inhaltsverzeichnis

### Quadratisch integrable Funktionen

44. Definition und Eigenschaften der quadratisch integrierbaren Funktionen . . . . .	212
45. Konvergenz im Mittel . . . . .	214
46. Approximation quadratisch integrierbarer Funktionen durch Treppenfunktionen . . . . .	218

### Das Lebesguesche Integral auf abstrakten Maßräumen.

#### Maß und Integral auf Produkträumen

47. Meßbare Funktionen auf abstrakten Maßräumen . . . . .	221
48. Lebesguesche Integrale auf abstrakten Maßräumen . . . . .	224
49. Produktmaße . . . . .	228
50. Der Satz von Fubini . . . . .	235

### Das Lebesguesche Integral für Funktionen einer reellen Veränderlichen

51. Definition und Grundregeln . . . . .	243
52. Totalstetige Funktionen . . . . .	244
53. Differenzierbare Funktionen . . . . .	247
54. Das unbestimmte Integral . . . . .	256
55. Das Lebesgue-Stieltjessche Integral . . . . .	265

## Vierter Abschnitt

### Allgemeine topologische Räume

#### Vorbemerkungen über metrische Räume

56. Definition des metrischen Raums. Beispiele . . . . .	271
57. Der Umgebungsbegriff in metrischen Räumen . . . . .	275

### Definition und einfachste Eigenschaften topologischer Räume

58. Definition des topologischen Raums durch Umgebungssysteme . . . . .	278
59. Häufungspunkte und Berührungspunkte . . . . .	281
60. Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	282
61. Kern und Hülle einer Menge . . . . .	287
62. $\mathcal{U}$ -Topologie und $\mathcal{O}$ -Topologie . . . . .	291
63. Basis einer Topologie . . . . .	294

### Stetige und homöomorphe Abbildungen

64. Limes und Häufungspunkte von Punktfolgen . . . . .	298
65. Stetige Abbildungen . . . . .	300
66. Homöomorphie . . . . .	303

## Inhaltsverzeichnis

### Vergleich und Erzeugung von Topologien

67. Vergleich von Topologien . . . . .	306
68. Topologie zu gegebener Subbasis . . . . .	308
69. Untere und obere Grenze einer Familie von Topologien . . . . .	309
70. Teilräume . . . . .	310
71. Topologische Summen . . . . .	316
72. Topologische Produkte . . . . .	318

### Zusammenhang und Dichte

73. Zusammenhängende Mengen . . . . .	322
74. Zusammenhangskomponenten . . . . .	328
75. Überall dichte und nirgends dichte Mengen. Separable Räume . . . . .	329

## Fünfter Abschnitt

### Hausdorffsche Räume

#### Filter

76. Definition des Filters . . . . .	333
77. Vergleich von Filtern . . . . .	335
78. Abbildung von Filtern . . . . .	337
79. Ultrafilter . . . . .	339

#### Definition des Hausdorffschen Raums.

##### Konvergenztheorie

80. Definition des Hausdorffschen Raums . . . . .	341
81. Konvergenz von Filtern . . . . .	344
82. Häufungspunkte von Filtern . . . . .	346
83. Häufungspunkte von Mengen . . . . .	348
84. Stetigkeit von Abbildungen . . . . .	349
85. Konvergenz in Räumen mit abzählbaren Umgebungsbasen . . . . .	350

##### Kompakte Räume

86. Definition des kompakten Raums . . . . .	353
87. Abzählbar kompakte und folgenkompakte Räume . . . . .	356
88. Kompakte Mengen . . . . .	359
89. Abbildungen kompakter Mengen . . . . .	363
90. Kompakte Produkte . . . . .	364
91. Lokalkompakte Räume. Kompaktifizierung . . . . .	365

##### Reguläre und normale Räume

92. Reguläre Räume . . . . .	369
93. Normale Räume . . . . .	371
94. Der Erweiterungssatz von Tietze . . . . .	373

# Inhaltsverzeichnis

## Sechster Abschnitt

### Metrische Räume

#### Allgemeine Eigenschaften. Vollständige metrische Räume

95. Abstand und Durchmesser . . . . .	380
96. Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	384
97. Konvergenz. Vollständige metrische Räume . . . . .	387
98. Vervollständigung eines metrischen Raums . . . . .	393

#### Kompakten

99. Totalbeschränkte Mengen . . . . .	397
100. Definition des Kompaktums. Kompaktheitskriterien . . . . .	400
101. Einige Eigenschaften der Kompakten . . . . .	404
102. Relativ kompakte Mengen . . . . .	408
103. Der Satz von Arzelà-Ascoli . . . . .	410

#### Metrisierung

104. Das Metrisierungsproblem . . . . .	416
105. Die Urysohn'schen Metrisierungssätze . . . . .	416

## Siebenter Abschnitt

### Vektorräume

#### Vorbemerkungen über die Euklidischen Vektorräume

106. Der $n$ -dimensionale Zahlenvektorraum . . . . .	421
107. Der $n$ -dimensionale Euklidische Vektorraum . . . . .	423

#### Allgemeine Vektorräume

108. Definition des Vektorraums . . . . .	425
109. Unterräume eines Vektorraums . . . . .	431
110. Basis eines Vektorraums . . . . .	432
111. Endlichdimensionale Vektorräume . . . . .	436

#### Normierte Vektorräume

112. Definition des normierten Vektorraums . . . . .	441
113. Separable normierte Vektorräume . . . . .	446
114. Banachräume . . . . .	449
115. Endlichdimensionale normierte Vektorräume . . . . .	452

## **Inhaltsverzeichnis**

### **Hilberträume**

116. Vektorräume mit Skalarprodukt . . . . .	456
117. Definition des Hilbertraums . . . . .	460
118. Orthogonale Zerlegungen von Hilberträumen . . . . .	462
119. Orthonormalsysteme in separablen Hilberträumen . . . . .	467
120. Orthogonalreihen in separablen Hilberträumen . . . . .	472
121. Der Hilbertsche Folgenraum $l_2$ . . . . .	480
122. Der Hilbertsche Funktionenraum $L_2[a, b]$ . . . . .	482
123. Isomorphismus separabler Hilberträume . . . . .	484
124. Trigonometrische Fourierreihen . . . . .	487

## **Achter Abschnitt**

### **Funktionalanalysis**

#### **Operatoren in metrischen Räumen**

125. Allgemeines über Operatoren . . . . .	491
126. Der Banachsche Fixpunktsatz . . . . .	492
127. Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes . . . . .	495

#### **Operatoren in normierten Vektorräumen**

128. Lineare Operatoren. Stetigkeit und Beschränktheit . . . . .	500
129. Der Raum der beschränkten linearen Operatoren . . . . .	507
130. Der Umkehroperator eines linearen Operators . . . . .	513
131. Lineare Funktionale . . . . .	519
132. Schwache Konvergenz . . . . .	527

#### **Selbstadjungierte Operatoren in Hilberträumen**

133. Adjungierte Operatoren . . . . .	533
134. Selbstadjungierte Operatoren . . . . .	537
135. Operatorgleichungen mit selbstadjungierten Operatoren . . . . .	541
136. Die Lösung für Punkte der Resolventenmenge . . . . .	543
137. Die Lösung für Punkte des Spektrums . . . . .	545
138. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators . . . . .	549

#### **Vollstetige Operatoren in Hilberträumen**

139. Vollstetige Operatoren . . . . .	555
140. Das Spektrum eines vollstetigen, selbstadjungierten Operators . . . . .	558
141. Die Lösungen der Operatorgleichung $(T - \lambda E)x = y$ . . . . .	563

# **Inhaltsverzeichnis**

## **Neunter Abschnitt**

### **Integralgleichungen**

#### **Vorbereitungen**

142. Definitionen und Beispiele . . . . .	567
143. Die Fredholmsche Integralgleichung . . . . .	571
144. Der Satz von Stone-Weierstraß . . . . .	574

#### **Die Fredholmschen Sätze**

145. Die Neumannsche Reihe . . . . .	577
146. Integralgleichungen mit ausgeartetem Kern . . . . .	579
147. Integralgleichungen mit beliebigem Kern . . . . .	584

#### **Die Fredholmsche Integralgleichung mit symmetrischem Kern**

148. Eigenwerte und Eigenfunktionen der Integralgleichung mit symmetrischem Kern . . . . .	590
149. Entwicklungssätze . . . . .	593
Literaturverzeichnis . . . . .	599
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	602