

Inhaltsverzeichnis

I Nichtsteife Differentialgleichungen	1
1 Theoretische Grundlagen	1
1.1 Einführung	1
1.2 Existenz, Eindeutigkeit und Sensitivität	3
1.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	9
1.4 Beispiele	12
1.5 Aufgaben	17
2 Einschrittverfahren	20
2.1 Einführung in klassische Diskretisierungsverfahren	20
2.2 Konsistenz und Konvergenz	23
2.3 Rundungsfehleranalyse bei Einschrittverfahren	29
2.4 Runge-Kutta-Verfahren	32
2.4.1 Struktur der Runge-Kutta-Verfahren	32
2.4.2 Ordnungsaussagen und B-Reihen	37
2.4.3 Explizite Runge-Kutta-Verfahren bis zur Ordnung vier	49
2.4.4 Explizite Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung	55
2.5 Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung	57
2.5.1 Fehlerschätzung mittels Richardson-Extrapolation	59
2.5.2 Fehlerschätzung mittels eingebetteter Verfahren	64
2.5.3 PI-Regler	67
2.6 Stetige explizite Runge-Kutta-Verfahren	70
2.7 Weiterführende Bemerkungen	73
2.8 Aufgaben	76
3 Explizite Extrapolationsverfahren	79
3.1 Asymptotische Entwicklung des globalen Fehlers	79
3.2 Gespiegelte und symmetrische Verfahren	81
3.3 Der Extrapolationsvorgang	85
3.4 Das Gragg-Bulirsch-Stoer-Verfahren	90
3.5 Explizite Runge-Kutta-Verfahren beliebiger Ordnung	93
3.6 Bemerkungen zur Schrittweiten- und Ordnungssteuerung	94

3.7	Weiterführende Bemerkungen	96
3.8	Aufgaben	97
4	Lineare Mehrschrittverfahren	99
4.1	Adams-Verfahren	99
4.1.1	Explizite Adams-Verfahren	99
4.1.2	Implizite Adams-Verfahren	102
4.2	Allgemeine lineare Mehrschrittverfahren auf äquidistantem Gitter	105
4.2.1	Konsistenz und Ordnungsaussagen	106
4.2.2	Lineare Differenzengleichungen	116
4.2.3	Nullstabilität und erste Dahlquist-Schranke	121
4.2.4	Schwach stabile lineare Mehrschrittverfahren	128
4.2.5	Konvergenz	130
4.3	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	136
4.4	Lineare Mehrschrittverfahren auf variablem Gitter	141
4.4.1	Adams-Verfahren auf variablem Gitter	141
4.4.2	Konsistenz, Stabilität und Konvergenz	144
4.4.3	Adams-Verfahren in Nordsieckform	149
4.5	Schrittweiten- und Ordnungssteuerung in PECE-Verfahren	153
4.6	Weiterführende Bemerkungen	157
4.7	Aufgaben	161
5	Explizite Peer-Methoden	164
5.1	Definition der Methoden und Konsistenz	164
5.2	Konvergenz	168
5.3	Superkonvergenz	169
5.4	Implementierung	175
5.5	Weiterführende Bemerkungen	177
5.6	Aufgaben	181
6	Numerischer Vergleich nichtsteifer Integratoren	182
6.1	Vergleichskriterien und spezielle Integratoren	182
6.2	Numerische Tests von Verfahren für nichtsteife Systeme	184
II	Steife Differentialgleichungen	191
7	Qualitatives Lösungsverhalten von Differentialgleichungen	191
7.1	Ljapunov-Stabilität	191
7.2	Einseitige Lipschitz-Konstante und logarithmische Matrixnorm	194
7.3	Differentialgleichungen als dynamische Systeme	200

7.4	Steife Differentialgleichungen	203
7.4.1	Charakterisierung steifer Systeme	203
7.4.2	Auftreten steifer Systeme	208
8	Einschritt- und Extrapolationsverfahren	212
8.1	Implizite Runge-Kutta-Verfahren	212
8.1.1	Die vereinfachenden Bedingungen	213
8.1.2	Gauß-Verfahren	220
8.1.3	Radau-Verfahren	222
8.1.4	Lobatto-Verfahren	225
8.1.5	Kollokationsverfahren	228
8.1.6	Diagonal-implizite Runge-Kutta-Verfahren	231
8.1.7	Stetige implizite Runge-Kutta-Verfahren	233
8.2	Stabilität von Runge-Kutta-Verfahren	234
8.2.1	Die Stabilitätsfunktion	234
8.2.2	A-Stabilität, A(α)-Stabilität und L-Stabilität	238
8.2.3	Padé-Approximationen der Exponentialfunktion	240
8.2.4	A-Stabilität von Runge-Kutta-Verfahren hoher Ordnung	243
8.2.5	A-Stabilität von SDIRK-Verfahren	245
8.2.6	AN-stabile Runge-Kutta-Verfahren	248
8.2.7	BN-stabile Runge-Kutta-Verfahren	250
8.2.8	Stabilitätsgebiete expliziter Runge-Kutta-Verfahren	258
8.3	Ordnungssterne	259
8.4	Das Konzept der B-Konvergenz	264
8.4.1	Motivation	264
8.4.2	B-Konsistenz und B-Konvergenz	267
8.5	W-Transformation	271
8.6	Implementierung impliziter Runge-Kutta-Verfahren	275
8.6.1	Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme	275
8.6.2	Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung	281
8.7	ROW- und W-Methoden	282
8.7.1	Herleitung der Methoden	283
8.7.2	Konsistenz	285
8.7.3	Stabilität	291
8.7.4	Bemerkungen zur Implementierung	292
8.7.5	Partitionierte Verfahren	294
8.7.6	Krylov-W-Methoden	300
8.8	Bemerkungen zu Extrapolationsverfahren	306
8.9	Weiterführende Bemerkungen	310
8.10	Aufgaben	313

9 Lineare Mehrschrittverfahren	314
9.1 Stabilitätsgebiete und zweite Dahlquist-Schranke	314
9.2 BDF-Methoden	323
9.2.1 Darstellung und Eigenschaften	323
9.2.2 Nordsieck-Darstellung	330
9.3 One-Leg-Methoden und G-Stabilität	333
9.4 Weiterführende Bemerkungen	337
9.5 Aufgaben	340
10 Linear-implizite Peer-Methoden	342
10.1 Definition der Verfahren und Konsistenzaussagen	342
10.2 Stabilität und Konvergenz	345
10.3 Bestimmung konkreter Verfahren	349
10.4 Verallgemeinerungen	350
10.5 Weiterführende Bemerkungen	353
10.6 Aufgaben	353
11 Exponentielle Integratoren	354
11.1 Motivation und theoretische Grundlagen	354
11.2 Exponentielle Runge-Kutta-Verfahren	357
11.3 Exponentielle Mehrschrittverfahren	363
11.4 Exponentielle Peer-Methoden	367
11.5 Fragen der Implementierung und numerische Illustration	374
11.6 Adaptive Runge-Kutta-Verfahren	379
11.7 Weiterführende Bemerkungen	387
11.8 Aufgaben	389
12 Numerischer Vergleich steifer Integratoren	390
III Differential-algebraische Gleichungen	396
13 Theorie differential-algebraischer Gleichungen	396
13.1 Einführung	396
13.2 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	397
13.2.1 Eigenschaften linearer DAEs	397
13.2.2 Weierstraß-Kronecker-Normalform	399
13.3 Indexbegriffe	407
13.3.1 Der Differentiationsindex	407
13.3.2 Der Störungsindex	417
13.4 Anwendungen	422
13.4.1 Elektrische Netzwerke	422

13.4.2 Mechanische Mehrkörpersysteme	428
13.4.3 Grenzprozess singulär gestörter Systeme	435
13.5 Weiterführende Bemerkungen	441
13.6 Aufgaben	442
14 Diskretisierungsverfahren für differential-algebraische Gleichungen	445
14.1 Ein Beispiel – Euler-Verfahren	445
14.2 Verfahren für Index-1-Systeme in Hessenbergform	448
14.2.1 Runge-Kutta-Verfahren	449
14.2.2 Rosenbrock-Methoden	453
14.2.3 Lineare Mehrschrittverfahren	455
14.3 Verfahren für Index-2-Systeme in Hessenbergform	457
14.3.1 Runge-Kutta-Verfahren	457
14.3.2 Projizierte implizite Runge-Kutta-Verfahren	458
14.3.3 Lineare Mehrschrittverfahren	460
14.3.4 Partitionierte halb-explizite Runge-Kutta-Verfahren	462
14.4 Indexreduktion und Drift-off-Effekt	467
14.5 Weiterführende Bemerkungen	477
14.6 Aufgaben	479
Literaturverzeichnis	480
Symbolverzeichnis	499
Sachverzeichnis	501