

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Nichtsteife Differentialgleichungen</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung . . . . .	1
1.2	Existenz, Eindeutigkeit und Sensitivität . . . . .	3
1.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	9
1.4	Beispiele . . . . .	12
1.5	Aufgaben . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Einschrittverfahren</b>	<b>20</b>
2.1	Einführung in klassische Diskretisierungsverfahren . . . . .	20
2.2	Konsistenz und Konvergenz . . . . .	23
2.3	Rundungsfehleranalyse bei Einschrittverfahren . . . . .	29
2.4	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	32
2.4.1	Struktur der Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	32
2.4.2	Ordnungsaussagen und B-Reihen . . . . .	37
2.4.3	Explizite Runge-Kutta-Verfahren bis zur Ordnung vier . . . . .	49
2.4.4	Explizite Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung . . . . .	55
2.5	Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung . . . . .	57
2.5.1	Fehlerschätzung mittels Richardson-Extrapolation . . . . .	59
2.5.2	Fehlerschätzung mittels eingebetteter Verfahren . . . . .	64
2.5.3	PI-Regler . . . . .	67
2.6	Stetige explizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	70
2.7	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	73
2.8	Aufgaben . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Explizite Extrapolationsverfahren</b>	<b>79</b>
3.1	Asymptotische Entwicklung des globalen Fehlers . . . . .	79
3.2	Gespiegelte und symmetrische Verfahren . . . . .	81
3.3	Der Extrapolationsvorgang . . . . .	85
3.4	Das Gragg-Bulirsch-Stoer-Verfahren . . . . .	90
3.5	Explizite Runge-Kutta-Verfahren beliebiger Ordnung . . . . .	93
3.6	Bemerkungen zur Schrittweiten- und Ordnungssteuerung . . . . .	94

3.7	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	96
3.8	Aufgaben . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Lineare Mehrschrittverfahren</b>	<b>99</b>
4.1	Adams-Verfahren . . . . .	99
4.1.1	Explizite Adams-Verfahren . . . . .	99
4.1.2	Implizite Adams-Verfahren . . . . .	102
4.2	Allgemeine lineare Mehrschrittverfahren auf äquidistantem Gitter .	105
4.2.1	Konsistenz und Ordnungsaussagen . . . . .	106
4.2.2	Lineare Differenzengleichungen . . . . .	116
4.2.3	Nullstabilität und erste Dahlquist-Schranke . . . . .	121
4.2.4	Schwach stabile lineare Mehrschrittverfahren . . . . .	128
4.2.5	Konvergenz . . . . .	130
4.3	Prädiktor-Korrektor-Verfahren . . . . .	136
4.4	Lineare Mehrschrittverfahren auf variablem Gitter . . . . .	141
4.4.1	Adams-Verfahren auf variablem Gitter . . . . .	141
4.4.2	Konsistenz, Stabilität und Konvergenz . . . . .	144
4.4.3	Adams-Verfahren in Nordsieckform . . . . .	149
4.5	Schrittweiten- und Ordnungssteuerung in PECE-Verfahren . . . .	153
4.6	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	157
4.7	Aufgaben . . . . .	161
<b>5</b>	<b>Explizite Peer-Methoden</b>	<b>164</b>
5.1	Definition der Methoden und Konsistenz . . . . .	164
5.2	Konvergenz . . . . .	168
5.3	Superkonvergenz . . . . .	169
5.4	Implementierung . . . . .	175
5.5	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	177
5.6	Aufgaben . . . . .	181
<b>6</b>	<b>Numerischer Vergleich nichtsteifer Integratoren</b>	<b>182</b>
6.1	Vergleichskriterien und spezielle Integratoren . . . . .	182
6.2	Numerische Tests von Verfahren für nichtsteife Systeme . . . . .	184
<b>II</b>	<b>Steife Differentialgleichungen</b>	<b>191</b>
<b>7</b>	<b>Qualitatives Lösungsverhalten von Differentialgleichungen</b>	<b>191</b>
7.1	Ljapunov-Stabilität . . . . .	191
7.2	Einseitige Lipschitz-Konstante und logarithmische Matrixnorm . .	194
7.3	Differentialgleichungen als dynamische Systeme . . . . .	200

7.4	Steife Differentialgleichungen . . . . .	203
7.4.1	Charakterisierung steifer Systeme . . . . .	203
7.4.2	Auftreten steifer Systeme . . . . .	208
<b>8</b>	<b>Einschritt- und Extrapolationsverfahren</b>	<b>212</b>
8.1	Implizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	212
8.1.1	Die vereinfachenden Bedingungen . . . . .	213
8.1.2	Gauß-Verfahren . . . . .	220
8.1.3	Radau-Verfahren . . . . .	222
8.1.4	Lobatto-Verfahren . . . . .	225
8.1.5	Kollokationsverfahren . . . . .	228
8.1.6	Diagonal-implizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	231
8.1.7	Stetige implizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	233
8.2	Stabilität von Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	234
8.2.1	Die Stabilitätsfunktion . . . . .	234
8.2.2	A-Stabilität, $A(\alpha)$ -Stabilität und L-Stabilität . . . . .	238
8.2.3	Padé-Approximationen der Exponentialfunktion . . . . .	240
8.2.4	A-Stabilität von Runge-Kutta-Verfahren hoher Ordnung . . . . .	243
8.2.5	A-Stabilität von SDIRK-Verfahren . . . . .	245
8.2.6	AN-stabile Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	248
8.2.7	BN-stabile Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	250
8.2.8	Stabilitätsgebiete expliziter Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	258
8.3	Ordnungssterne . . . . .	259
8.4	Das Konzept der B-Konvergenz . . . . .	264
8.4.1	Motivation . . . . .	264
8.4.2	B-Konsistenz und B-Konvergenz . . . . .	267
8.5	W-Transformation . . . . .	271
8.6	Implementierung impliziter Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	275
8.6.1	Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme . . . . .	275
8.6.2	Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung . . . . .	281
8.7	ROW- und W-Methoden . . . . .	282
8.7.1	Herleitung der Methoden . . . . .	283
8.7.2	Konsistenz . . . . .	285
8.7.3	Stabilität . . . . .	291
8.7.4	Bemerkungen zur Implementierung . . . . .	292
8.7.5	Partitionierte Verfahren . . . . .	294
8.7.6	Krylov-W-Methoden . . . . .	300
8.8	Bemerkungen zu Extrapolationsverfahren . . . . .	306
8.9	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	310
8.10	Aufgaben . . . . .	313

<b>9</b>	<b>Lineare Mehrschrittverfahren</b>	<b>314</b>
9.1	Stabilitätsgebiete und zweite Dahlquist-Schranke . . . . .	314
9.2	BDF-Methoden . . . . .	323
9.2.1	Darstellung und Eigenschaften . . . . .	323
9.2.2	Nordsieck-Darstellung . . . . .	330
9.3	One-Leg-Methoden und G-Stabilität . . . . .	333
9.4	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	337
9.5	Aufgaben . . . . .	340
<b>10</b>	<b>Linear-implizite Peer-Methoden</b>	<b>342</b>
10.1	Definition der Verfahren und Konsistenzaussagen . . . . .	342
10.2	Stabilität und Konvergenz . . . . .	345
10.3	Bestimmung konkreter Verfahren . . . . .	349
10.4	Verallgemeinerungen . . . . .	350
10.5	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	353
10.6	Aufgaben . . . . .	353
<b>11</b>	<b>Exponentielle Integratoren</b>	<b>354</b>
11.1	Motivation und theoretische Grundlagen . . . . .	354
11.2	Exponentielle Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	357
11.3	Exponentielle Mehrschrittverfahren . . . . .	363
11.4	Exponentielle Peer-Methoden . . . . .	367
11.5	Fragen der Implementierung und numerische Illustration . . . . .	374
11.6	Adaptive Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	379
11.7	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	387
11.8	Aufgaben . . . . .	389
<b>12</b>	<b>Numerischer Vergleich steifer Integratoren</b>	<b>390</b>
<b>III</b>	<b>Differential-algebraische Gleichungen</b>	<b>396</b>
<b>13</b>	<b>Theorie differential-algebraischer Gleichungen</b>	<b>396</b>
13.1	Einführung . . . . .	396
13.2	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	397
13.2.1	Eigenschaften linearer DAEs . . . . .	397
13.2.2	Weierstraß-Kronecker-Normalform . . . . .	399
13.3	Indexbegriffe . . . . .	407
13.3.1	Der Differentiationsindex . . . . .	407
13.3.2	Der Störungsindex . . . . .	417
13.4	Anwendungen . . . . .	422
13.4.1	Elektrische Netzwerke . . . . .	422

13.4.2	Mechanische Mehrkörpersysteme . . . . .	428
13.4.3	Grenzprozess singular gestörter Systeme . . . . .	435
13.5	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	441
13.6	Aufgaben . . . . .	442
<b>14</b>	<b>Diskretisierungsverfahren für differential-algebraische Gleichungen</b>	<b>445</b>
14.1	Ein Beispiel – Euler-Verfahren . . . . .	445
14.2	Verfahren für Index-1-Systeme in Hessenbergform . . . . .	448
14.2.1	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	449
14.2.2	Rosenbrock-Methoden . . . . .	453
14.2.3	Lineare Mehrschrittverfahren . . . . .	455
14.3	Verfahren für Index-2-Systeme in Hessenbergform . . . . .	457
14.3.1	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	457
14.3.2	Projizierte implizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	458
14.3.3	Lineare Mehrschrittverfahren . . . . .	460
14.3.4	Partitionierte halb-explizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	462
14.4	Indexreduktion und Drift-off-Effekt . . . . .	467
14.5	Weiterführende Bemerkungen . . . . .	477
14.6	Aufgaben . . . . .	479
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>480</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>499</b>
	<b>Sachverzeichnis</b>	<b>501</b>