

Inhaltsverzeichnis

<i>Historische Einführung</i>	1
---	---

<i>Zeittafel</i>	6
----------------------------	---

Teil A. Elemente der Funktionentheorie

<i>Kapitel 0. Komplexe Zahlen und stetige Funktionen</i>	7
--	---

§ 1. Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	7
---	---

1. Der Körper \mathbb{C} – 2. \mathbb{R} -lineare und \mathbb{C} -lineare Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ –
3. Skalarprodukt und absoluter Betrag – 4. Winkeltreue Abbildungen

§ 2. Topologische Grundbegriffe	13
---	----

1. Metrische Räume – 2. Offene und abgeschlossene Mengen – 3. Konvergente Folgen. Häufungspunkte – 4. Historisches zum Konvergenzbegriff –
5. Kompakte Mengen

§ 3. Konvergente Folgen komplexer Zahlen	18
--	----

1. Rechenregeln – 2. Cauchysches Konvergenzkriterium. Charakterisierung kompakter Mengen in \mathbb{C}

§ 4. Konvergente und absolut konvergente Reihen	20
---	----

1. Konvergente Reihen komplexer Zahlen – 2. Absolut konvergente Reihen. Majorantenkriterium – 3. Umordnungssatz – 4. Historisches zur absoluten Konvergenz – 5. Bemerkungen zum Riemannschen Umordnungssatz –
6. Reihenproduktsatz

§ 5. Stetige Funktionen	27
-----------------------------------	----

1. Stetigkeitsbegriff – 2. Die \mathbb{C} -Algebra $\mathcal{C}(X)$ – 3. Historisches zum Funktionsbegriff – 4. Historisches zum Stetigkeitsbegriff

§ 6. Zusammenhängende Räume. Gebiete in \mathbb{C}	31
--	----

1. Lokal-konstante Funktionen. Zusammenhangsbegriff – 2. Wege und Wegzusammenhang – 3. Gebiete in \mathbb{C} – 4. Zusammenhangskomponenten von Bereichen – 5. Rand und Randabstand

<i>Kapitel 1. Komplexe Differentialrechnung</i>	36
---	----

§ 1. Komplex differenzierbare Funktionen	37
--	----

1. Komplexe Differenzierbarkeit – 2. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen – 3. Historisches zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

X Inhaltsverzeichnis

§ 2.	Komplexe und reelle Differenzierbarkeit	40
	1. Charakterisierung komplex differenzierbarer Funktionen – 2. Ein hinreichendes Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit – 3. Beispiele zu den Cauchy-Riemannschen Gleichungen – 4* Harmonische Funktionen	
§ 3.	Holomorphe Funktionen	45
	1. Differentiationsregeln – 2. Die \mathbb{C} -Algebra $\mathcal{O}(D)$ – 3. Charakterisierung lokal-konstanter Funktionen – 4. Historisches zur Notation	
§ 4.	Partielle Differentiation nach x, y, z und \bar{z}	50
	1. Die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$ – 2. Beziehungen zwischen den Ableitungen $u_x, u_y, v_x, v_y, f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$ – 3. Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ – 4. Kalkül der Differentialoperatoren ∂ und $\bar{\partial}$	
	<i>Kapitel 2. Holomorphie und Winkeltreue. Biholomorphe Abbildungen</i>	<i>57</i>
§ 1.	Holomorphe Funktionen und Winkeltreue	58
	1. Winkeltreue, Holomorphie und Antiholomorphie – 2. Winkel- und Orientierungstreue, Holomorphie – 3. Geometrische Deutung der Winkeltreue – 4. Zwei Beispiele – 5. Historisches zur Winkeltreue	
§ 2.	Biholomorphe Abbildungen	63
	1. Komplexe 2×2 Matrizen und biholomorphe Abbildungen – 2. Die biholomorphe Cayleyabbildung $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ – 3. Bemerkungen zur Cayleyabbildung – 4* Bijektive holomorphe Abbildungen von \mathbb{H} und von \mathbb{E} auf die geschlitzte Ebene	
§ 3.	Automorphismen der oberen Halbebene und des Einheitskreises	68
	1. Automorphismen von \mathbb{H} – 2. Automorphismen von \mathbb{E} – 3. Die Schreibweise $\eta \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$ für Automorphismen von \mathbb{E} – 4. Homogenität von \mathbb{E} und \mathbb{H}	
	<i>Kapitel 3. Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie</i>	<i>72</i>
§ 1.	Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz	73
	1. Gleichmäßige Konvergenz – 2. Lokal-gleichmäßige Konvergenz – 3. Kompakte Konvergenz – 4. Historisches zur gleichmäßigen Konvergenz – 5* Kompakte und stetige Konvergenz	
§ 2.	Konvergenzkriterien	80
	1. Cauchysches Konvergenzkriterium – 2. Weierstraßsches Majorantenkriterium	
§ 3.	Normal konvergente Reihen	82
	1. Normale Konvergenz – 2. Diskussion der normalen Konvergenz – 3. Historisches zur normalen Konvergenz	
	<i>Kapitel 4. Potenzreihen</i>	<i>85</i>
§ 1.	Konvergenzkriterien	85
	1. Abelsches Konvergenzlemma – 2. Konvergenzradius – 3. Formel von CAUCHY-HADAMARD – 4. Quotientenkriterium – 5. Historisches zu konvergenten Potenzreihen	

§ 2.	Beispiele konvergenter Potenzreihen	90
	1. Exponentialreihe und trigonometrische Reihen. Eulersche Formel – 2. Logarithmische Reihe und Arcustangensreihe – 3. Binomische Reihe – 4* Konvergenzverhalten auf dem Rand – 5* Abelscher Stetigkeitssatz	
§ 3.	Holomorphie von Potenzreihen	96
	1. Formale gliedweise Differentiation und Integration – 2. Holomorphie von Potenzreihen. Vertauschungssatz – 3. Historisches zur gliedweisen Differen- tiation von Reihen – 4. Beispiele holomorpher Funktionen	
§ 4.	Struktur der Algebra der konvergenten Potenzreihen	100
	1. Ordnungsfunktion – 2. Einheitsatz – 3. Normalform konvergenter Po- tenzreihen – 4. Bestimmung aller Ideale	

Kapitel 5. Elementar-transzendente Funktionen 104

§ 1.	Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	104
	1. Charakterisierung von $\exp z$ durch die Differentialgleichung – 2. Addi- tionstheorem der Exponentialfunktion – 3. Bemerkungen zum Additions- theorem – 4. Additionstheoreme für $\cos z$ und $\sin z$ – 5. Historisches zu $\cos z$ und $\sin z$ – 6. Hyperbolische Funktionen	
§ 2.	Epimorphiesatz für $\exp z$ und Folgerungen	109
	1. Epimorphiesatz – 2. Die Gleichung $\text{Kern}(\exp)=2\pi i \mathbb{Z}$ – 3. Periodizität von $\exp z$ – 4. Wertevorrat, Nullstellen und Periodizität von $\cos z$ und $\sin z$ – 5. Cotangens- und Tangensfunktion. Arcustangensreihe – 6. Die Gleichung $e^{\frac{i\pi}{2}}=i$	
§ 3.	Polarkoordinaten, Einheitswurzeln und natürliche Grenzen	115
	1. Polarkoordinaten – 2. Einheitswurzeln – 3. Singuläre Punkte und natürli- che Grenzen – 4. Historisches zu natürlichen Grenzen	
§ 4.	Logarithmusfunktionen	120
	1. Definition und elementare Eigenschaften – 2. Existenz von Logarithmus- funktionen – 3. Die Eulersche Folge $(1+z/n)^n$ – 4. Hauptzweig des Logarith- mus – 5. Historisches zur Logarithmusfunktion im Komplexen	
§ 5.	Diskussion von Logarithmusfunktionen	125
	1. Zu den Identitäten $\log(wz)=\log w+\log z$ und $\log(\exp z)=z$ – 2. Logarith- mus und Arcustangens – 3. Potenzfunktionen. Formel von NEWTON-ABEL – 4. Die Riemannsche ζ -Funktion	

Teil B. Cauchysche Funktionentheorie

Kapitel 6. Komplexe Integralrechnung 130

§ 0.	Integration in reellen Intervallen	131
	1. Integralbegriff. Rechenregeln und Standardabschätzung – 2. Fundament- alsatz der Differential- und Integralrechnung	
§ 1.	Wegintegrale in \mathbb{C}	133
	1. Stetig und stückweise stetig differenzierbare Wege – 2. Integration längs Wege – 3. Die Integrale $\int_{\partial B} (\zeta-c)^n d\zeta$ – 4. Historisches zur Integration im	

	Komplexen – 5. Unabhängigkeit von der Parametrisierung – 6. Zusammenhang mit reellen Kurvenintegralen	
§ 2.	Eigenschaften komplexer Wegintegrale	139
	1. Rechenregeln – 2. Standardabschätzung – 3. Vertauschungssätze – 4. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_B} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$	
§ 3.	Wegunabhängigkeit von Integralen. Stammfunktionen	144
	1. Stammfunktionen – 2. Bemerkungen über Stammfunktionen. Integrabilitätskriterium – 3. Integrabilitätskriterium für Sterngebiete	
	<i>Kapitel 7. Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung</i>	149
§ 1.	Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete	149
	1. Integrallemma von GOURSAT – 2. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete – 3. Historisches zum Integralsatz – 4. Historisches zum Integrallemma – 5.* Reeller Beweis des Integrallemmas – 6.* Die Fresnelschen Integrale	
	7.* Das Integral $I(z) := \int_0^\infty t^{-1}(e^{-t} - e^{-tz}) dt$	
§ 2.	Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben	158
	1. Verschärfung des Cauchyschen Integralsatzes für Sterngebiete – 2. Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben – 3. Historisches zur Integralformel – 4.* Die Cauchysche Integralformel für reell stetig differenzierbare Funktionen – 5.* Schwarzsche Integralformel	
§ 3.	Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen	163
	1. Entwicklungslemma – 2. Entwicklungssatz von CAUCHY-TAYLOR – 3. Historisches zum Entwicklungssatz – 4. Riemannscher Fortsetzungssatz – 5. Historisches zum Riemannschen Fortsetzungssatz	
§ 4.	Diskussion des Entwicklungssatzes	169
	1. Holomorphie und unendlich häufige komplexe Differenzierbarkeit – 2. Umbildungssatz – 3. Analytische Fortsetzung – 4. Produktsatz für Potenzreihen – 5. Bestimmung von Konvergenzradien	
§ 5*.	Spezielle Taylorreihen. Bernoullische Zahlen	173
	1. Taylorreihe von $z(e^z - 1)^{-1}$. Bernoullische Zahlen – 2. Taylorreihen von $z \cot z$, $\tan z$ und $\frac{z}{\sin z}$ – 3. Potenzsummen und Bernoullische Zahlen – 4. Bernoullische Polynome	

Teil C. Cauchy-Weierstraß-Riemannsche Funktionentheorie

	<i>Kapitel 8. Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen</i>	178
§ 1.	Identitätssatz	178
	1. Identitätssatz – 2. Historisches zum Identitätssatz – 3. Diskretheit und Abzählbarkeit der a -Stellen – 4. Nullstellenordnung und Vielfachheit – 5. Existenz singulärer Punkte	
§ 2.	Der Holomorphiebegriff	185
	1. Holomorphie, lokale Integrabilität und konvergente Potenzreihen –	

	2. Holomorphie von Integralen - 3. Holomorphie, Winkel- und Orientierungstreue (endgültige Fassung) - 4. Cauchyscher, Riemannscher und Weierstraßscher Standpunkt. Das Glaubensbekenntnis von WEIERSTRASS	
§ 3.	Cauchysche Abschätzungen und Ungleichungen für Taylorkoeffizienten	189
	1. Cauchysche Abschätzungen für Ableitungen in Kreisscheiben - 2. Gutzmerische Formel. Maximumprinzip - 3. Ganze Funktionen. Satz von LIOUVILLE - 4. Historisches zu den Cauchyschen Ungleichungen und zum Satz von LIOUVILLE - 5.* Beweis der Cauchyschen Ungleichungen nach WEIERSTRASS	
§ 4.	Konvergenzsätze von WEIERSTRASS	195
	1. Weierstraßscher Konvergenzsatz 2. Differentiationssätze für Reihen. Weierstraßscher Doppelreihensatz - 3. Historisches zu den Konvergenzsätzen - 4. Konvergenzsatz für Folgen von Stammfunktionen - 5.* Eine Bemerkung WEIERSTRASS' zur Holomorphie - 6.* Eine Konstruktion von WEIERSTRASS	
§ 5.	Offenheitssatz und Maximumprinzip	201
	1. Offenheitssatz - 2. Maximumprinzip - 3. Historisches zum Maximumprinzip - 4. Verschärfung des Weierstraßschen Konvergenzsatzes - 5. Satz von HURWITZ	
<i>Kapitel 9. Miscellanea</i>		208
§ 1.	Fundamentalsatz der Algebra	208
	1. Fundamentalsatz der Algebra - 2. Vier Beweise des Fundamentalsatzes - 3. Satz von GAUSS über die Lage der Nullstellen von Ableitungen	
§ 2.	Schwarzsches Lemma und die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{E}$, $\text{Aut } \mathbb{H}$.	211
	1. Schwarzsches Lemma - 2. Mittelpunktstreue Automorphismen von \mathbb{E} . Die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{E}$ und $\text{Aut } \mathbb{H}$ - 3. Fixpunkte von Automorphismen - 4. Historisches zum Schwarzschen Lemma - 5. Lemma von SCHWARZ-PICK - 6. Satz von STUDY	
§ 3.	Holomorphe Logarithmen und holomorphe Wurzeln	217
	1. Logarithmische Ableitung. Existenzlemma - 2. Homologisch einfach zusammenhängende Bereiche. Existenz holomorpher Logarithmusfunktionen - 3. Holomorphe Wurzelfunktionen - 4. Die Gleichung $f(z) = f(c) \exp \int_c^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$ - 5. Die Kraft der Quadratwurzel	
§ 4.	Biholomorphe Abbildungen. Lokale Normalform.	221
	1. Biholomorphiekriterium - 2. Lokale Injektivität und lokal-biholomorphe Abbildungen - 3. Lokale Normalform - 4. Geometrische Interpretation der lokalen Normalform - 5. Faktorisierung holomorpher Funktionen	
§ 5.	Allgemeine Cauchy-Theorie	226
	1. Die Indexfunktion $\text{ind}_\gamma(z)$ - 2. Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheorie - 3. Beweis von $\text{iii}) \Rightarrow \text{ii})$ nach DIXON - 4. Nullhomologie. Charakterisierung homologisch einfach zusammenhängender Bereiche	
§ 6.*	Asymptotische Potenzreihenentwicklungen	231
	1. Definition und elementare Eigenschaften - 2. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz asymptotischer Entwicklungen - 3. Asymptotische Entwicklungen und Differentiation - 4. Satz von RITT - 5. Satz von E. BOREL	

<i>Kapitel 10. Isolierte Singularitäten. Meromorphe Funktionen</i>	239
§ 1. Isolierte Singularitäten	239
1. Hebbare Singularitäten. Pole – 2. Entwicklung von Funktionen um Polstellen – 3. Wesentliche Singularitäten. Satz von CASORATI und WEIERSTRASS – 4. Historisches zur Charakterisierung isolierter Singularitäten	
§ 2* Automorphismen punktierter Bereiche	244
1. Isolierte Singularitäten holomorpher Injektionen – 2. Die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{C}$ und $\text{Aut } \mathbb{C}^*$ – 3. Automorphismen punktierter beschränkter Bereiche – 4. Starre Gebiete	
§ 3. Meromorphe Funktionen	248
1. Definition der Meromorphie – 2. Die \mathbb{C} -Algebra $\mathcal{M}(D)$ der in D meromorphen Funktionen – 3. Division von meromorphen Funktionen – 4. Die Ordnungsfunktion o_c	
<i>Kapitel 11. Konvergente Reihen meromorpher Funktionen</i>	254
§ 1. Allgemeine Konvergenztheorie	254
1. Kompakte und normale Konvergenz – 2. Rechenregeln – 3. Beispiele	
§ 2. Die Partialbruchentwicklung von $\pi \cot \pi z$	258
1. Cotangens und Verdopplungsformel. Die Identität $\pi \cot \pi z = \varepsilon_1(z)$ – 2. Historisches zur Cotangensreihe und zu ihrem Beweis – 3. Partialbruchreihen für $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ und $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ – 4* Charakterisierung des Cotangens durch sein Additionstheorem bzw. seine Differentialgleichung	
§ 3. Die Eulerschen Formeln für $\sum_{v \geq 1} \frac{1}{v^{2n}}$	262
1. Entwicklung von $\varepsilon_1(z)$ um 0 und Eulersche Formeln für $\zeta(2n)$ – 2. Historisches zu den Eulerschen $\zeta(2n)$ -Formeln – 3. Differentialgleichung für ε_1 und eine Identität für Bernoullische Zahlen – 4. Die Eisensteinreihen	
$e_k(z) := \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+v)^k}$	
§ 4* EISENSTEIN-Theorie trigonometrischer Funktionen	265
1. Additionstheorem – 2. Eisensteins Grundformeln – 3. Weitere Eisenstein-Formeln und die Identität $\varepsilon_1(z) = \pi \cot \pi z$ – 4. Skizze der Theorie der Kreisfunktionen nach EISENSTEIN	
<i>Kapitel 12. Laurentreihen und Fourierreihen</i>	272
§ 1. Holomorphe Funktionen in Kreisingen und Laurentreihen	272
1. Cauchytheorie für Kreisinge – 2. Laurentdarstellung in Kreisingen – 3. Laurententwicklungen – 4. Beispiele – 5. Historisches zum Satz von LAURENT – 6.* Herleitung des Satzes von LAURENT aus dem Satz von CAUCHY-TAYLOR	
§ 2. Eigenschaften von Laurentreihen	283
1. Konvergenzsatz und Identitätssatz – 2. Gutzmersche Formel und Cauchysche Ungleichungen – 3. Charakterisierung isolierter Singularitäten	

§ 3.	Periodische holomorphe Funktionen und Fourierreihen	287
	1. Streifengebiete und Kreisringe – 2. Periodische holomorphe Funktionen in Streifengebieten – 3. Fourierentwicklung in Streifengebieten – 4. Beispiele – 5. Historisches zu Fourierreihen	
§ 4.	Die Thetafunktion	291
	1. Konvergenzsatz – 2. Konstruktion doppelt-periodischer Funktionen – 3. Die Fourierreihe von $e^{-z^2\pi\tau} \vartheta(i\tau z, \tau)$ – 4. Transformationsformel der Thetafunktion – 5. Historisches zur Thetafunktion – 6. Über das Fehlerintegral	

Kapitel 13. Residuenkalkül 300

§ 1.	Residuensatz	300
	1. Einfach geschlossene Wege – 2. Das Residuum – 3. Beispiele – 4. Residuensatz – 5. Historisches zum Residuensatz	
§ 2.	Folgerungen aus dem Residuensatz	308
	1. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a} d\zeta$ – 2. Anzahlformel für Null- und Polstellen – 3. Satz von ROUCHÉ	

Kapitel 14. Bestimmte Integrale und Residuenkalkül 314

§ 1.	Berechnung von Integralen	314
	0. Uneigentliche Integrale – 1. Trigonometrische Integrale $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ – 2. Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ – 3. Das Integral $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ für $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$	
§ 2.	Weitere Integralauswertungen	319
	1. Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} dx$ – 2. Uneigentliche Integrale $\int_0^{\infty} q(x) x^{a-1} dx$ – 3. Die Integrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx$	
§ 3.	Gaußsche Summen	326
	1. Abschätzung von $\frac{e^{n\pi}}{e^{\pi} - 1}$ für $0 \leq u \leq 1$ – 2. Berechnung der Gaußschen Summen $G_n := \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i j^2}{n}}$, $n \geq 1$ – 3. Direkter residuentheoretischer Beweis der Formel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ – 4. Fourierreihen der Bernoullischen Polynome	

Kurzbiographien von ABEL, CAUCHY, EISENSTEIN, EULER, RIEMANN und WEIERSTRASS 333

Photographie von Riemanns Grabplatte 337

<i>Literatur</i>	338
Klassische Literatur zur Funktionentheorie – Lehrbuchliteratur zur Funktionentheorie – Literatur zur Geschichte der Funktionentheorie und der Mathematik	
<i>Symbolverzeichnis</i>	346
<i>Namenverzeichnis</i>	347
<i>Sachverzeichnis</i>	351
<i>Porträts berühmter Mathematiker</i>	2, 271