

# Inhaltsverzeichnis

<i>Historische Einführung</i> . . . . .	1
<i>Zeittafel</i> . . . . .	6
<b>Teil A. Elemente der Funktionentheorie</b>	
<i>Kapitel 0. Komplexe Zahlen und stetige Funktionen</i> . . . . .	7
§ 1. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen . . . . .	7
1. Der Körper $\mathbb{C}$ – 2. $\mathbb{R}$ -lineare und $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – 3. Skalarprodukt und absoluter Betrag – 4. Winkeltreue Abbildungen	
§ 2. Topologische Grundbegriffe . . . . .	13
1. Metrische Räume – 2. Offene und abgeschlossene Mengen – 3. Konvergente Folgen. Häufungspunkte – 4. Historisches zum Konvergenzbegriff – 5. Kompakte Mengen	
§ 3. Konvergente Folgen komplexer Zahlen . . . . .	18
1. Rechenregeln – 2. Cauchysches Konvergenzkriterium. Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{C}$	
§ 4. Konvergente und absolut konvergente Reihen . . . . .	20
1. Konvergente Reihen komplexer Zahlen – 2. Absolut konvergente Reihen. Majorantenkriterium – 3. Umordnungssatz – 4. Historisches zur absoluten Konvergenz – 5. Bemerkungen zum Riemannschen Umordnungssatz – 6. Reihenprodukte	
§ 5. Stetige Funktionen . . . . .	27
1. Stetigkeitsbegriff – 2. Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{C}(X)$ – 3. Historisches zum Funktionsbegriff – 4. Historisches zum Stetigkeitsbegriff	
§ 6. Zusammenhängende Räume. Gebiete in $\mathbb{C}$ . . . . .	31
1. Lokal-konstante Funktionen. Zusammenhangsbegriff – 2. Wege und Wegzusammenhang – 3. Gebiete in $\mathbb{C}$ – 4. Zusammenhangskomponenten von Bereichen – 5. Rand und Randabstand	
<i>Kapitel 1. Komplexe Differentialrechnung</i> . . . . .	36
§ 1. Komplex differenzierbare Funktionen . . . . .	37
1. Komplexe Differenzierbarkeit – 2. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen – 3. Historisches zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	

X	Inhaltsverzeichnis	
§ 2.	Komplexe und reelle Differenzierbarkeit . . . . .	40
	1. Charakterisierung komplex differenzierbarer Funktionen – 2. Ein hinreichendes Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit – 3. Beispiele zu den Cauchy-Riemannschen Gleichungen – 4.* Harmonische Funktionen	
§ 3.	Holomorphe Funktionen . . . . .	45
	1. Differentiationsregeln – 2. Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{O}(D)$ – 3. Charakterisierung lokal-konstanter Funktionen – 4. Historisches zur Notation	
§ 4.	Partielle Differentiation nach $x, y, z$ und $\bar{z}$ . . . . .	50
	1. Die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$ – 2. Beziehungen zwischen den Ableitungen $u_x, u_y, v_x, v_y, f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$ – 3. Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ – 4. Kalkül der Differentialoperatoren $\partial$ und $\bar{\partial}$	
<i>Kapitel 2. Holomorphie und Winkeltreue. Biholomorphe Abbildungen . . . . .</i>		57
§ 1.	Holomorphe Funktionen und Winkeltreue . . . . .	58
	1. Winkeltreue, Holomorphie und Antiholomorphie – 2. Winkel- und Orientierungstreue, Holomorphie – 3. Geometrische Deutung der Winkeltreue – 4. Zwei Beispiele – 5. Historisches zur Winkeltreue	
§ 2.	Biholomorphe Abbildungen . . . . .	63
	1. Komplexe $2 \times 2$ Matrizen und biholomorphe Abbildungen – 2. Die biholomorphe Cayleyabbildung $\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}$ , $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ – 3. Bemerkungen zur Cayleyabbildung – 4.* Bijektive holomorphe Abbildungen von $\mathbb{H}$ und von $\mathbb{E}$ auf die geschlitzte Ebene	
§ 3.	Automorphismen der oberen Halbebene und des Einheitskreises . . . . .	68
	1. Automorphismen von $\mathbb{H}$ – 2. Automorphismen von $\mathbb{E}$ – 3. Die Schreibweise $\eta \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$ für Automorphismen von $\mathbb{E}$ – 4. Homogenität von $\mathbb{E}$ und $\mathbb{H}$	
<i>Kapitel 3. Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie . . . . .</i>		72
§ 1.	Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz . . . . .	73
	1. Gleichmäßige Konvergenz – 2. Lokal-gleichmäßige Konvergenz – 3. Kompakte Konvergenz – 4. Historisches zur gleichmäßigen Konvergenz – 5.* Kompakte und stetige Konvergenz	
§ 2.	Konvergenzkriterien . . . . .	80
	1. Cauchysches Konvergenzkriterium – 2. Weierstraßsches Majorantenkriterium	
§ 3.	Normal konvergente Reihen . . . . .	82
	1. Normale Konvergenz – 2. Diskussion der normalen Konvergenz – 3. Historisches zur normalen Konvergenz	
<i>Kapitel 4. Potenzreihen . . . . .</i>		85
§ 1.	Konvergenzkriterien . . . . .	85
	1. Abelsches Konvergenzlemma – 2. Konvergenzradius – 3. Formel von CAUCHY-HADAMARD – 4. Quotientenkriterium – 5. Historisches zu konvergenten Potenzreihen	

§ 2. Beispiele konvergenter Potenzreihen . . . . .	90
1. Exponentialreihe und trigonometrische Reihen. Eulersche Formel -	
2. Logarithmische Reihe und Arcustangensreihe - 3. Binomische Reihe -	
4* Konvergenzverhalten auf dem Rand - 5* Abelscher Stetigkeitssatz	
§ 3. Holomorphie von Potenzreihen . . . . .	96
1. Formale gliedweise Differentiation und Integration - 2. Holomorphie von Potenzreihen. Vertauschungssatz - 3. Historisches zur gliedweisen Differentiation von Reihen - 4. Beispiele holomorpher Funktionen	
§ 4. Struktur der Algebra der konvergenten Potenzreihen . . . . .	100
1. Ordnungsfunktion - 2. Einheitsatz - 3. Normalform konvergenter Potenzreihen - 4. Bestimmung aller Ideale	

### *Kapitel 5. Elementar-transzendente Funktionen . . . . .* 104

§ 1. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen . . . . .	104
1. Charakterisierung von $\exp z$ durch die Differentialgleichung - 2. Additionstheorem der Exponentialfunktion - 3. Bemerkungen zum Additionstheorem - 4. Additionstheoreme für $\cos z$ und $\sin z$ - 5. Historisches zu $\cos z$ und $\sin z$ - 6. Hyperbolische Funktionen	
§ 2. Epimorphiesatz für $\exp z$ und Folgerungen . . . . .	109
1. Epimorphiesatz - 2. Die Gleichung $\text{Kern}(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z}$ - 3. Periodizität von $\exp z$ - 4. Wertevorrat, Nullstellen und Periodizität von $\cos z$ und $\sin z$ - 5. Cotangens- und Tangensfunktion. Arcustangensreihe - 6. Die Gleichung $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$	
§ 3. Polarkoordinaten, Einheitswurzeln und natürliche Grenzen . . . . .	115
1. Polarkoordinaten - 2. Einheitswurzeln - 3. Singuläre Punkte und natürliche Grenzen - 4. Historisches zu natürlichen Grenzen	
§ 4. Logarithmusfunktionen . . . . .	120
1. Definition und elementare Eigenschaften - 2. Existenz von Logarithmusfunktionen - 3. Die Eulersche Folge $(1+z/n)^n$ - 4. Hauptzweig des Logarithmus - 5. Historisches zur Logarithmusfunktion im Komplexen	
§ 5. Diskussion von Logarithmusfunktionen . . . . .	125
1. Zu den Identitäten $\log(wz) = \log w + \log z$ und $\log(\exp z) = z$ - 2. Logarithmus und Arcustangens - 3. Potenzfunktionen. Formel von NEWTON-ABEL - 4. Die Riemannsche $\zeta$ -Funktion	

## Teil B. Cauchysche Funktionentheorie

<i>Kapitel 6. Komplexe Integralrechnung . . . . .</i>	130
§ 0. Integration in reellen Intervallen . . . . .	131
1. Integralbegriff. Rechenregeln und Standardabschätzung - 2. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	
§ 1. Wegintegrale in $\mathbb{C}$ . . . . .	133
1. Stetig und stückweise stetig differenzierbare Wege - 2. Integration längs Wegen - 3. Die Integrale $\int_C (\zeta - c)^n d\zeta$ - 4. Historisches zur Integration im	

## XII Inhaltsverzeichnis

Komplexen – 5. Unabhängigkeit von der Parametrisierung – 6. Zusammenhang mit reellen Kurvenintegralen	
§ 2. Eigenschaften komplexer Wegintegrale . . . . .	139
1. Rechenregeln – 2. Standardabschätzung – 3. Vertauschungssätze – 4. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$	
§ 3. Wegunabhängigkeit von Integralen. Stammfunktionen . . . . .	144
1. Stammfunktionen – 2. Bemerkungen über Stammfunktionen. Integrabilitätskriterium – 3. Integrabilitätskriterium für Sterngebiete	
<i>Kapitel 7. Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung</i> . . . . .	149
§ 1. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete . . . . .	149
1. Integrallemma von GOURSAT – 2. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete – 3. Historisches zum Integralsatz – 4. Historisches zum Integrallemma – 5.* Reeller Beweis des Integrallemmas – 6.* Die Fresnelschen Integrale	
7.* Das Integral $I(z) := \int_0^z t^{-1} (e^{-t} - e^{-iz}) dt$	
§ 2. Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben . . . . .	158
1. Verschärfung des Cauchyschen Integralsatzes für Sterngebiete – 2. Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben – 3. Historisches zur Integralformel – 4* Die Cauchysche Integralformel für reell stetig differenzierbare Funktionen – 5* Schwarzsche Integralformel	
§ 3. Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen . . . . .	163
1. Entwicklungssatz – 2. Entwicklungssatz von CAUCHY-TAYLOR – 3. Historisches zum Entwicklungssatz – 4. Riemannscher Fortsetzungssatz – 5. Historisches zum Riemannschen Fortsetzungssatz	
§ 4. Diskussion des Entwicklungssatzes . . . . .	169
1. Holomorphie und unendlich häufige komplexe Differenzierbarkeit – 2. Umbildungssatz – 3. Analytische Fortsetzung – 4. Produktsatz für Potenzreihen – 5. Bestimmung von Konvergenzradien	
§ 5* Spezielle Taylorreihen. Bernoullische Zahlen . . . . .	173
1. Taylorreihe von $z(e^z - 1)^{-1}$ . Bernoullische Zahlen – 2. Taylorreihen von $z \cot z$ , $\tan z$ und $\frac{z}{\sin z}$ – 3. Potenzsummen und Bernoullische Zahlen – 4. Bernoullische Polynome	
<b>Teil C. Cauchy-Weierstraß-Riemannsche Funktionentheorie</b>	
<i>Kapitel 8. Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen</i> . . . . .	178
§ 1. Identitätssatz . . . . .	178
1. Identitätssatz – 2. Historisches zum Identitätssatz – 3. Diskretheit und Abzählbarkeit der $a$ -Stellen – 4. Nullstellenordnung und Vielfachheit – 5. Existenz singulärer Punkte	
§ 2. Der Holomorphiebegriff . . . . .	185
1. Holomorphie, lokale Integrabilität und konvergente Potenzreihen –	

2. Holomorphie von Integralen - 3. Holomorphie, Winkel- und Orientierungs-treue (endgültige Fassung) - 4. Cauchyscher, Riemannscher und Weierstraß-scher Standpunkt. Das Glaubensbekenntnis von WEIERSTRASS	
<b>§ 3. Cauchysche Abschätzungen und Ungleichungen für Taylorkoeffizien-ten . . . . .</b>	<b>189</b>
1. Cauchysche Abschätzungen für Ableitungen in Kreis Scheiben - 2. Gutzmer-sche Formel. Maximumprinzip - 3. Ganze Funktionen. Satz von LIOUVILLE - 4. Historisches zu den Cauchyschen Ungleichungen und zum Satz von LIOUVILLE - 5.* Beweis der Cauchyschen Ungleichungen nach WEIERSTRASS	
<b>§ 4. Konvergenzsätze von WEIERSTRASS . . . . .</b>	<b>195</b>
1. Weierstraßscher Konvergenzsatz - 2. Differentiationsätze für Reihen. Weierstraßscher Doppelreihensatz - 3. Historisches zu den Konvergenzsätzen - 4. Konvergenzsatz für Folgen von Stammfunktionen - 5.* Eine Bemerkung WEIERSTRASS' zur Holomorphie - 6.* Eine Konstruktion von WEIERSTRASS	
<b>§ 5. Offenheitssatz und Maximumprinzip . . . . .</b>	<b>201</b>
1. Offenheitssatz - 2. Maximumprinzip - 3. Historisches zum Maximum-prinzip - 4. Verschärfung des Weierstraßschen Konvergenzsatzes - 5. Satz von HURWITZ	
<b>Kapitel 9. Miscellanea . . . . .</b>	<b>208</b>
<b>§ 1. Fundamentalsatz der Algebra . . . . .</b>	<b>208</b>
1. Fundamentalsatz der Algebra - 2. Vier Beweise des Fundamentalsatzes - 3. Satz von GAUSS über die Lage der Nullstellen von Ableitungen	
<b>§ 2. Schwarzsches Lemma und die Gruppen Aut <math>\mathbb{E}</math>, Aut <math>\mathbb{H}</math>. . . . .</b>	<b>211</b>
1. Schwarzsches Lemma - 2. Mittelpunktstreue Automorphismen von $\mathbb{E}$ . Die Gruppen Aut $\mathbb{E}$ und Aut $\mathbb{H}$ - 3. Fixpunkte von Automorphismen - 4. Histori-sches zum Schwarzschen Lemma - 5. Lemma von SCHWARZ-PICK - 6. Satz von STUDY	
<b>§ 3. Holomorphe Logarithmen und holomorphe Wurzeln . . . . .</b>	<b>217</b>
1. Logarithmische Ableitung. Existenzlemma - 2. Homologisch einfach zusam-menhängende Bereiche. Existenz holomorpher Logarithmusfunktionen - 3. Holomorphe Wurzelfunktionen - 4. Die Gleichung $f(z) = f(c) \exp \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$ - 5. Die Kraft der Quadratwurzel	
<b>§ 4. Biholomorphe Abbildungen. Lokale Normalform . . . . .</b>	<b>221</b>
1. Biholomorphiekriterium - 2. Lokale Injektivität und lokal-biholomorphe Abbildungen - 3. Lokale Normalform - 4. Geometrische Interpretation der lokalen Normalform - 5. Faktorisierung holomorpher Funktionen	
<b>§ 5. Allgemeine Cauchy-Theorie . . . . .</b>	<b>226</b>
1. Die Indexfunktion $\text{ind}_{\gamma}(z)$ - 2. Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheo-rie - 3. Beweis von iii) $\Rightarrow$ ii) nach DIXON - 4. Nullhomologie. Charakterisierung homologisch einfach zusammenhängender Bereiche	
<b>§ 6.* Asymptotische Potenzreihenentwicklungen . . . . .</b>	<b>231</b>
1. Definition und elementare Eigenschaften - 2. Eine hinreichende Bedin-gung für die Existenz asymptotischer Entwicklungen - 3. Asymptotische Entwicklungen und Differentiation - 4. Satz von RITT - 5. Satz von E. BOREL	

<i>Kapitel 10. Isolierte Singularitäten. Meromorphe Funktionen . . . . .</i>	239
§ 1. Isolierte Singularitäten . . . . .	239
1. Hebbare Singularitäten. Pole – 2. Entwicklung von Funktionen um Polstellen – 3. Wesentliche Singularitäten. Satz von CASORATI und WEIERSTRASS – 4. Historisches zur Charakterisierung isolierter Singularitäten	
§ 2.* Automorphismen punktierter Bereiche . . . . .	244
1. Isolierte Singularitäten holomorpher Injektionen – 2. Die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{C}$ und $\text{Aut } \mathbb{C}^*$ – 3. Automorphismen punktierter beschränkter Bereiche – 4. Starre Gebiete	
§ 3. Meromorphe Funktionen . . . . .	248
1. Definition der Meromorphie – 2. Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{M}(D)$ der in $D$ meromorphen Funktionen – 3. Division von meromorphen Funktionen – 4. Die Ordnungsfunktion $o_c$	
<i>Kapitel 11. Konvergente Reihen meromorpher Funktionen . . . . .</i>	254
§ 1. Allgemeine Konvergenztheorie . . . . .	254
1. Kompakte und normale Konvergenz – 2. Rechenregeln – 3. Beispiele	
§ 2. Die Partialbruchentwicklung von $\pi \cot \pi z$ . . . . .	258
1. Cotangens und Verdopplungsformel. Die Identität $\pi \cot \pi z = \varepsilon_1(z)$ – 2. Historisches zur Cotangensreihe und zu ihrem Beweis – 3. Partialbruchreihen für $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ und $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ – 4.* Charakterisierung des Cotangens durch sein Additionstheorem bzw. seine Differentialgleichung	
§ 3. Die Eulerschen Formeln für $\sum_{v \geq 1} \frac{1}{v^{2n}}$ . . . . .	262
1. Entwicklung von $\varepsilon_1(z)$ um 0 und Eulersche Formeln für $\zeta(2n)$ – 2. Historisches zu den Eulerschen $\zeta(2n)$ -Formeln – 3. Differentialgleichung für $\varepsilon_1$ und eine Identität für Bernoulli-Zahlen – 4. Die Eisensteinreihen $\varepsilon_k(z) := \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+v)^k}$	
§ 4.* EISENSTEIN-Theorie trigonometrischer Funktionen . . . . .	265
1. Additionstheorem – 2. Eisensteins Grundformeln – 3. Weitere Eisenstein-Sche Formeln und die Identität $\varepsilon_1(z) = \pi \cot \pi z$ – 4. Skizze der Theorie der Kreisfunktionen nach EISENSTEIN	
<i>Kapitel 12. Laurentreihen und Fourierreihen . . . . .</i>	272
§ 1. Holomorphe Funktionen in Kreisringen und Laurentreihen . . . . .	272
1. Cauchytheorie für Kreisringe – 2. Laurentdarstellung in Kreisringen – 3. Laurententwicklungen – 4. Beispiele – 5. Historisches zum Satz von LAURENT – 6.* Herleitung des Satzes von LAURENT aus dem Satz von CAUCHY-TAYLOR	
§ 2. Eigenschaften von Laurentreihen . . . . .	283
1. Konvergenzsatz und Identitätssatz – 2. Gutzmersche Formel und Cauchysche Ungleichungen – 3. Charakterisierung isolierter Singularitäten	

§ 3. Periodische holomorphe Funktionen und Fourierreihen . . . . .	287
1. Streifengebiete und Kreisringe – 2. Periodische holomorphe Funktionen in Streifengebieten – 3. Fourierreitung in Streifengebieten – 4. Beispiele – 5. Historisches zu Fourierreihen	
§ 4. Die Thetafunktion . . . . .	291
1. Konvergenzsatz – 2. Konstruktion doppelt-periodischer Funktionen – 3. Die Fourierreihe von $e^{-z^2\pi i} \theta(iz, t)$ – 4. Transformationsformel der Theta- funktion – 5. Historisches zur Thetafunktion – 6. Über das Fehlerintegral	
 <i>Kapitel 13. Residuenkalkül</i> . . . . .	300
§ 1. Residuensatz . . . . .	300
1. Einfach geschlossene Wege – 2. Das Residuum – 3. Beispiele – 4. Residuen- satz – 5. Historisches zum Residuensatz	
§ 2. Folgerungen aus dem Residuensatz . . . . .	308
1. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_y F(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a} d\zeta$ – 2. Anzahlformel für Null- und Polstel- len – 3. Satz von ROUCHÉ	
 <i>Kapitel 14. Bestimmte Integrale und Residuenkalkül</i> . . . . .	314
§ 1. Berechnung von Integralen . . . . .	314
0. Uneigentliche Integrale – 1. Trigonometrische Integrale $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ – 2. Uneigentliche Integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ – 3. Das Integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ für $m, n \in \mathbb{N}$ , $0 < m < n$	
§ 2. Weitere Integralauswertungen . . . . .	319
1. Uneigentliche Integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ix} dx$ – 2. Uneigentliche Integrale $\int\limits_0^{\infty} q(x) x^{\alpha-1} dx$ – 3. Die Integrale $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx$	
§ 3. Gaußsche Summen . . . . .	326
1. Abschätzung von $\frac{e^{uz}}{e^z - 1}$ für $0 \leq u \leq 1$ – 2. Berechnung der Gaußschen Summen $G_n := \sum\limits_0^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} v^2}$ , $n \geq 1$ – 3. Direkter residuentheoretischer Beweis der Formel $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ – 4. Fourierreihen der Bernoullischen Polynome	
 <i>Kurzbiographien von ABEL, CAUCHY, EISENSTEIN, EULER, RIEMANN und WEIERSTRASS</i> . . . . .	333
<i>Photographie von Riemanns Grabplatte</i> . . . . .	337

## XVI Inhaltsverzeichnis

<i>Literatur</i> . . . . .	338
Klassische Literatur zur Funktionentheorie – Lehrbuchliteratur zur Funktionentheorie – Literatur zur Geschichte der Funktionentheorie und der Mathematik	
<i>Symbolverzeichnis</i> . . . . .	346
<i>Namenverzeichnis</i> . . . . .	347
<i>Sachverzeichnis</i> . . . . .	351
<i>Porträts berühmter Mathematiker</i> . . . . .	2, 271