

# Inhaltsverzeichnis

<i>Historische Einführung</i> . . . . .	1
<i>Zeittafel</i> . . . . .	6
<b>Teil A. Elemente der Funktionentheorie</b>	
<i>Kapitel 0. Komplexe Zahlen und stetige Funktionen</i> . . . . .	7
§ 1. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen . . . . .	7
1. Der Körper $\mathbb{C}$ – 2. $\mathbb{R}$ -lineare und $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ –	
3. Skalarprodukt und absoluter Betrag – 4. Winkeltreue Abbildungen	
§ 2. Topologische Grundbegriffe . . . . .	13
1. Metrische Räume – 2. Offene und abgeschlossene Mengen – 3. Konvergente Folgen. Häufungspunkte – 4. Historisches zum Konvergenzbegriff –	
5. Kompakte Mengen	
§ 3. Konvergente Folgen komplexer Zahlen . . . . .	17
1. Rechenregeln – 2. Cauchysches Konvergenzkriterium. Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{C}$	
§ 4. Konvergente und absolut konvergente Reihen . . . . .	19
1. Konvergente Reihen komplexer Zahlen – 2. Absolut konvergente Reihen. Majorantenkriterium – 3. Umordnungssatz – 4. Historisches zur absoluten Konvergenz – 5. Bemerkungen zum Riemannschen Umordnungssatz –	
6. Reihenproduktatz	
§ 5. Stetige Funktionen . . . . .	25
1. Stetigkeitsbegriff – 2. Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{C}(X)$ – 3. Historisches zum Funktionsbegriff – 4. Historisches zum Stetigkeitsbegriff	
§ 6. Zusammenhängende Räume. Gebiete in $\mathbb{C}$ . . . . .	29
1. Lokal-konstante Funktionen. Zusammenhangsbegriff – 2. Wege und Wegzusammenhang – 3. Gebiete in $\mathbb{C}$ – 4. Zusammenhangskomponenten von Bereichen – 5. Rand und Randabstand	
<i>Kapitel 1. Komplexe Differentialrechnung</i> . . . . .	34
§ 1. Komplex differenzierbare Funktionen . . . . .	35
1. Komplexe Differenzierbarkeit – 2. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen – 3. Historisches zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	

## VIII Inhaltsverzeichnis

§ 2. Komplexe und reelle Differenzierbarkeit . . . . .	38
1. Charakterisierung komplex differenzierbarer Funktionen - 2. Ein hinreichendes Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit - 3. Beispiele zu den Cauchy-Riemannschen Gleichungen - 4* Harmonische Funktionen	
§ 3. Holomorphe Funktionen . . . . .	43
1. Differentiationsregeln - 2. Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{C}(D)$ - 3. Charakterisierung lokal-konstanter Funktionen - 4. Historisches zur Notation	
§ 4. Partielle Differentiation nach $x, y, z$ und $\bar{z}$ . . . . .	47
1. Die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$ - 2. Beziehungen zwischen den Ableitungen $u_x, u_y, v_x, v_y, f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$ - 3. Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ - 4. Kalkül der Differentialoperatoren $\hat{c}$ und $\hat{\bar{c}}$	
<b>Kapitel 2. Holomorphie und Winkeltreue. Biholomorphe Abbildungen . . . . .</b>	53
§ 1. Holomorphe Funktionen und Winkeltreue . . . . .	54
1. Winkeltreue, Holomorphie und Antiholomorphie - 2. Winkel- und Orientierungstreue, Holomorphie - 3. Geometrische Deutung der Winkeltreue - 4. Zwei Beispiele - 5. Historisches zur Winkeltreue	
§ 2. Biholomorphe Abbildungen . . . . .	59
1. Komplexe $2 \times 2$ Matrizen und biholomorphe Abbildungen - 2. Die biholomorphe Cayleyabbildung $\mathbb{H} \cong \mathbb{E}$ , $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ - 3. Bemerkungen zur Cayleyabbildung - 4* Bijektive holomorphe Abbildungen von $\mathbb{H}$ und von $\mathbb{E}$ auf die geschlitzte Ebene	
§ 3. Automorphismen der oberen Halbebene und des Einheitskreises . . . . .	63
1. Automorphismen von $\mathbb{H}$ - 2. Automorphismen von $\mathbb{E}$ - 3. Die Schreibweise $\eta \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$ für Automorphismen von $\mathbb{E}$ - 4. Homogenität von $\mathbb{E}$ und $\mathbb{H}$	
<b>Kapitel 3. Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie . . . . .</b>	67
§ 1. Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz . . . . .	68
1. Gleichmäßige Konvergenz - 2. Lokal-gleichmäßige Konvergenz - 3. Kompakte Konvergenz - 4. Historisches zur gleichmäßigen Konvergenz	
§ 2. Konvergenzkriterien . . . . .	72
1. Cauchysches Konvergenzkriterium - 2. Weierstraßsches Majorantenkriterium	
§ 3. Normal konvergente Reihen . . . . .	74
1. Normale Konvergenz - 2. Diskussion der normalen Konvergenz - 3. Historisches zur normalen Konvergenz	
<b>Kapitel 4. Potenzreihen . . . . .</b>	77
§ 1. Konvergenzkriterien . . . . .	77
1. Abelsches Konvergenzlemma - 2. Konvergenzradius - 3. Formel von CAUCHY-HADAMARD - 4. Quotientenkriterium - 5. Historisches zu konvergenten Potenzreihen	

§ 2. Beispiele konvergenter Potenzreihen . . . . .	81
1. Exponentialreihe und trigonometrische Reihen. Eulersche Formel -	
2. Logarithmische Reihe und Arcustangensreihe - 3. Binomische Reihe -	
4* Konvergenzverhalten auf dem Rand - 5* Abelscher Stetigkeitssatz	
§ 3. Holomorphie von Potenzreihen . . . . .	86
1. Formale gliedweise Differentiation und Integration - 2. Holomorphie von Potenzreihen. Vertauschungssatz - 3. Historisches zur gliedweisen Differentiation von Reihen - 4. Beispiele holomorpher Funktionen	
§ 4. Struktur der Algebra der konvergenten Potenzreihen . . . . .	90
1. Ordnungsfunktion - 2. Einheitsatz - 3. Normalform konvergenter Potenzreihen - 4. Bestimmung aller Ideale	
<i>Kapitel 5. Elementar-transzendente Funktionen</i> . . . . .	94
§ 1. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen . . . . .	94
1. Charakterisierung von $\exp z$ durch die Differentialgleichung - 2. Additionstheorem der Exponentialfunktion - 3. Bemerkungen zum Additionstheorem - 4. Additionstheoreme für $\cos z$ und $\sin z$ - 5. Historisches zu $\cos z$ und $\sin z$ - 6. Hyperbolische Funktionen	
§ 2. Epimorphiesatz für $\exp z$ und Folgerungen . . . . .	98
1. Epimorphiesatz - 2. Die Gleichung $\text{Kern}(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z}$ - 3. Periodizität von $\exp z$ - 4. Wertevorrat, Nullstellen und Periodizität von $\cos z$ und $\sin z$ - 5. Cotangens- und Tangensfunktion. Arcustangensreihe - 6. Die Gleichung $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$	
§ 3. Polarkoordinaten, Einheitswurzeln und natürliche Grenzen . . . . .	104
1. Polarkoordinaten - 2. Einheitswurzeln - 3. Singuläre Punkte und natürliche Grenzen - 4. Historisches zu natürlichen Grenzen	
§ 4. Logarithmusfunktionen . . . . .	108
1. Definition und elementare Eigenschaften - 2. Existenz von Logarithmusfunktionen - 3. Die Eulersche Folge $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ - 4. Hauptzweig des Logarithmus - 5. Historisches zur Logarithmusfunktion im Komplexen	
§ 5. Diskussion von Logarithmusfunktionen . . . . .	113
1. Zu den Identitäten $\log(wz) = \log w + \log z$ und $\log(\exp z) = z$ - 2. Logarithmus und Arcustangens - 3. Potenzfunktionen. Formel von NEWTON-ABEL - 4. Die Riemannsche $\zeta$ -Funktion	
<b>Teil B. Cauchysche Funktionentheorie</b>	
<i>Kapitel 6. Komplexe Integralrechnung</i> . . . . .	117
§ 0. Integration in reellen Intervallen . . . . .	118
1. Integralbegriff. Rechenregeln und Standardabschätzung - 2. Fundamentalatz der Differential- und Integralrechnung	
§ 1. Wegintegrale in $\mathbb{C}$ . . . . .	120
1. Stetig und stückweise stetig differenzierbare Wege - 2. Integration längs Wegen - 3. Die Integrale $\int\limits_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta$ - 4. Historisches zur Integration im	

## X Inhaltsverzeichnis

Komplexe - 5. Unabhängigkeit von der Parametrisierung - 6. Zusammenhang mit reellen Kurvenintegralen	126
§ 2. Eigenschaften komplexer Wegintegrale . . . . .	126
1. Rechenregeln - 2. Standardabschätzung - 3. Vertauschungssätze - 4. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_B} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$	
§ 3. Wegunabhängigkeit von Integralen. Stammfunktionen . . . . .	130
1. Stammfunktionen - 2. Allgemeines Integrierbarkeitskriterium - 3. Integrierbarkeitskriterium für Sterngebiete	
<i>Kapitel 7. Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung</i> . . . . .	136
§ 1. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete . . . . .	136
1. Integrallemma von GOURSAT - 2. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete - 3. Historisches zum Integralsatz - 4. Historisches zum Integrallemma - 5* Reeller Beweis des Integrallemmas - 6* Die Fresnelschen Integrale	
§ 2. Cauchysche Integralformel für Kreis Scheiben . . . . .	143
1. Verschärfung des Cauchyschen Integralsatzes für Sterngebiete - 2. Cauchysche Integralformel für Kreis Scheiben - 3. Historisches zur Integralformel - 4* Die Cauchysche Integralformel für reell stetig differenzierbare Funktionen - 5* Schwarzsche Integralformel	
§ 3. Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen . . . . .	148
1. Entwicklungssatz von CAUCHY-TAYLOR - 2. Historisches zum Entwicklungssatz - 3. Riemannscher Fortsetzungssatz - 4. Cauchysche Integralformeln für Ableitungen	
§ 4. Diskussion des Entwicklungssatzes . . . . .	153
1. Holomorphie und unendlich häufige komplexe Differenzierbarkeit - 2. Umbildungssatz - 3. Analytische Fortsetzung - 4. Produktsatz für Potenzreihen - 5. Bestimmung von Konvergenzradien	
§ 5* Spezielle Taylorreihen. Bernoullische Zahlen . . . . .	157
1. Taylorreihe von $z(e^z - 1)$ - 2. Bernoullische Zahlen - 3. Taylorreihen von $z \cot z$ , $\tan z$ und $\frac{z}{\sin z}$ - 4. Potenzsummen und Bernoullische Zahlen - 4. Bernoullische Polynome	
<b>Teil C. Cauchy-Weierstraß-Riemannsche Funktionentheorie</b>	
<i>Kapitel 8. Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen</i> . . . . .	162
§ 1. Identitätssatz . . . . .	162
1. Identitätssatz - 2. Historisches zum Identitätssatz - 3. Diskretheit und Abzählbarkeit der $a$ -Stellen - 4. Nullstellenordnung und Vielfachheit - 5. Existenz singulärer Punkte	
§ 2. Der Holomorphiebegriff . . . . .	168
1. Holomorphie, lokale Integrierbarkeit und konvergente Potenzreihen - 2. Holomorphie, Winkel- und Orientierungstreue (endgültige Fassung) - 3. Cauchyscher, Riemannscher und Weierstraßscher Standpunkt. Das Glaubensbekenntnis von WEIERSTRASS	

§ 3. Cauchysche Abschätzungen und Ungleichungen für Taylorkoeffizienten . . . . .	172
1. Cauchysche Abschätzungen für Ableitungen - 2. Gutzmersche Formel -	
3. Ganze Funktionen. Satz von LIOUVILLE - 4. Historisches zu den Cauchyschen Ungleichungen und zum Satz von LIOUVILLE - 5* Beweis der Cauchyschen Ungleichungen nach WEIERSTRASS . . . . .	172
§ 4. Konvergenzsatz von WEIERSTRASS . . . . .	177
1. Weierstraßscher Konvergenzsatz - 2. Differentiationssätze für Reihen -	
3. Weierstraßscher Doppelreihensatz - 4* Eine Bemerkung WEIERSTRASS' zur Holomorphie - 5* Eine Konstruktion von WEIERSTRASS	177
§ 5. Offenheitssatz und Maximumsprinzip . . . . .	183
1. Offenheitssatz - 2. Maximumsprinzip - 3. Historisches zum Maximumsprinzip - 4. Verschärfung des Weierstraßschen Konvergenzsatzes	183
<i>Kapitel 9. Miscellanea</i> . . . . .	187
§ 1. Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	187
1. Fundamentalsatz der Algebra - 2. Vier Beweise des Fundamentalsatzes -	
3. Satz von GAUSS über die Lage der Nullstellen von Ableitungen	187
§ 2. Schwarzsches Lemma und die Gruppen Aut $\mathbb{E}$ , Aut $\mathbb{H}$ . . . . .	190
1. Schwarzsches Lemma - 2. Mittelpunktstreue Automorphismen von $\mathbb{E}$ . Die Gruppen Aut $\mathbb{E}$ und Aut $\mathbb{H}$ - 3. Fixpunkte von Automorphismen - 4. Satz von PICK - 5. Historisches zum Schwarzschen und zum Pickschen Lemma	190
§ 3. Holomorphe Logarithmen und holomorphe Wurzeln . . . . .	194
1. Logarithmische Ableitung. Existenz holomorpher Logarithmusfunktionen - 2. Holomorphe Wurzelfunktionen - 3. Die Gleichung $f(z) = f(c) \exp \int \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$	194
§ 4. Biholomorphe Abbildungen. Lokale Normalform . . . . .	198
1. Biholomorphiekriterium - 2. Lokale Injektivität und lokal-biholomorphe Abbildungen - 3. Lokale Normalform - 4. Geometrische Interpretation der lokalen Normalform	198
§ 5*. Asymptotische Potenzreihenentwicklungen . . . . .	202
1. Definition und elementare Eigenschaften - 2. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz asymptotischer Entwicklungen - 3. Asymptotische Entwicklungen und Differentiation - 4. Satz von RITT - 5. Satz von E. BOREL	202
<i>Kapitel 10. Isolierte Singularitäten. Meromorphe Funktionen</i> . . . . .	210
§ 1. Isolierte Singularitäten . . . . .	210
1. Hebbare Singularitäten. Pole - 2. Entwicklung von Funktionen um Polstellen - 3. Wesentliche Singularitäten. Satz von CASORATI und WEIERSTRASS - 4. Historisches zur Charakterisierung isolierter Singularitäten	210
§ 2*. Automorphismen punktierter Bereiche . . . . .	215
1. Isolierte Singularitäten holomorpher Injektionen - 2. Die Gruppen Aut $\mathbb{C}$ und Aut $\mathbb{C}^*$ - 3. Automorphismen punktierter beschränkter Bereiche - 4. Starre Gebiete	215

## XII Inhaltsverzeichnis

§ 3. Meromorphe Funktionen . . . . .	219
1. Definition der Meromorphie – 2. Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{M}(D)$ der in $D$ meromorphen Funktionen – 3. Division von meromorphen Funktionen – 4. Weitere Eigenschaften – 5. Die Ordnungsfunktion $\sigma_c$	
<b>Kapitel 11. Konvergente Reihen meromorpher Funktionen . . . . .</b>	<b>224</b>
§ 1. Allgemeine Konvergenztheorie . . . . .	224
1. Kompakte und normale Konvergenz – 2. Rechenregeln – 3. Beispiele	
§ 2. Die Partialbruchentwicklung von $\pi \cot \pi z$ . . . . .	228
1. Cotangens und Verdopplungsformel. Die Identität $\pi \cot \pi z = \varepsilon_1(z)$ – 2. Historisches zur Cotangensreihe und zu ihrem Beweis – 3. Partialbruchreihen für $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ und $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ – 4* Charakterisierung des Cotangens durch sein Additionstheorem bzw. seine Differentialgleichung	
§ 3. Die Eulerschen Formeln für $\sum \frac{1}{v^{2n}}$ . . . . .	232
1. Entwicklung von $\varepsilon_1(z)$ um 0 und Eulersche Formeln für $\zeta(2n)$ – 2. Historisches zu den Eulerschen $\zeta(2n)$ -Formeln – 3. Differentialgleichung für $\varepsilon_1$ und eine Identität für Bernoullische Zahlen – 4. Die Eisensteinreihen $\varepsilon_k(z) := \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(z+v)^k}$	
§ 4*. EISENSTEIN-Theorie trigonometrischer Funktionen . . . . .	235
1. Additionstheorem – 2. Eisensteins Grundformeln – 3. Weitere Eisensteinische Formeln und die Identität $\varepsilon_1(z) = \pi \cot \pi z$ – 4. Skizze der Theorie der Kreisfunktionen nach EISENSTEIN	
<b>Kapitel 12. Laurentreihen und Fourierreihen . . . . .</b>	<b>242</b>
§ 1. Holomorphe Funktionen in Kreisringen und Laurentreihen . . . . .	242
1. Cauchytheorie für Kreisringe – 2. Laurentdarstellung in Kreisringen – 3. Laurententwicklungen – 4. Beispiele – 5. Historisches zum Satz von LAURENT	
§ 2. Eigenschaften von Laurentreihen . . . . .	250
1. Konvergenzsatz und Identitätssatz – 2. Gutzmersche Formel und Cauchysche Ungleichungen – 3. Charakterisierung isolierter Singularitäten	
§ 3. Periodische holomorphe Funktionen und Fourierreihen . . . . .	253
1. Variante des Riemannschen Fortsetzungssatzes – 2. Streifengebiete und Kreisringe – 3. Periodische holomorphe Funktionen in Streifengebieten – 4. Fourierentwicklung in Streifengebieten – 5. Beispiele – 6. Historisches zu Fourierreihen	
§ 4. Die Thetafunktion . . . . .	258
1. Konvergenzsatz – 2. Konstruktion doppelt-periodischer Funktionen – 3. Die Fourierreihe von $e^{-z^2\pi t} \vartheta(itz, t)$ – 4. Transformationsformel der Thetafunktion – 5. Historisches zur Thetafunktion – 6. Über das Fehlerintegral	

<i>Kapitel 13. Residuenkalkül</i> . . . . .	267
§ 1. Elementare Indextheorie und allgemeine Cauchysche Integralformel .	267
1. Die Indexfunktion $\text{ind}_\gamma(z)$ - 2. Einfach geschlossene Wege - 3. Cauchysche Integralformel für nullhomologe Wege	
§ 2. Residuensatz . . . . .	271
1. Das Residuum - 2. Beispiele - 3. Residuensatz - 4. Historisches zum Residuensatz	
§ 3. Folgerungen aus dem Residuensatz . . . . .	276
1. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} F(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - a} d\zeta$ - 2. Anzahlformel für Null- und Polstellen - 3. Satz von ROUCHÉ - 4. Satz von HURWITZ - 5. Historisches zu den Sätzen von ROUCHÉ und HURWITZ	
<i>Kapitel 14. Bestimmte Integrale und Residuenkalkül</i> . . . . .	282
§ 1. Berechnung von Integralen . . . . .	282
0. Uneigentliche Integrale - 1. Trigonometrische Integrale	
$\int\limits_{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ - 2. Uneigentliche Integrale $\int\limits_0^x f(x) dx$ - 3. Das Integral	
$\int\limits_0^x \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ für $m, n \in \mathbb{N}$ , $0 < m < n$	
§ 2. Weitere Integralauswertungen . . . . .	287
1. Uneigentliche Integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} dx$ - 2. Uneigentliche Integrale	
$\int\limits_0^{\infty} q(x) x^{a-1} dx$ - 3. Die Integrale $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx$	
§ 3. Gaußsche Summen . . . . .	293
1. Abschätzung von $\frac{e^{uz}}{e^z - 1}$ für $0 \leq u \leq 1$ - 2. Berechnung der Gaußschen Summen $G_n := \sum\limits_0^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} v^2}$ , $n \geq 1$ - 3. Direkter residuentheoretischer Beweis der Formel $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ - 4. Fourierreihen der Bernoullischen Polynome	
<i>Kurzbiographien von ABEL, CAUCHY, EISENSTEIN, EULER, RIEMANN und WEIERSTRASS</i> . . . . .	299
<i>Literatur</i> . . . . .	303
Klassische Literatur zur Funktionentheorie - Lehrbuchliteratur zur Funktionentheorie - Literatur zur Geschichte der Funktionentheorie und der Mathematik	
<i>Symbolverzeichnis</i> . . . . .	311
<i>Namenverzeichnis</i> . . . . .	312
<i>Sachverzeichnis</i> . . . . .	315
<i>Porträts berühmter Mathematiker</i> . . . . .	2, 241