

Inhaltsverzeichnis

<i>Historische Einführung</i>	1
---	---

<i>Zeittafel</i>	6
----------------------------	---

Teil A. Elemente der Funktionentheorie

<i>Kapitel 0. Komplexe Zahlen und stetige Funktionen</i>	7
--	---

§ 1. Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	7
---	---

1. Der Körper \mathbb{C} – 2. \mathbb{R} -lineare und \mathbb{C} -lineare Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ –
3. Skalarprodukt und absoluter Betrag – 4. Winkeltreue Abbildungen

§ 2. Topologische Grundbegriffe	13
---	----

1. Metrische Räume – 2. Offene und abgeschlossene Mengen – 3. Konvergente Folgen. Häufungspunkte – 4. Historisches zum Konvergenzbegriff –
5. Kompakte Mengen

§ 3. Konvergente Folgen komplexer Zahlen	17
--	----

1. Rechenregeln – 2. Cauchysches Konvergenzkriterium. Charakterisierung kompakter Mengen in \mathbb{C}

§ 4. Konvergente und absolut konvergente Reihen	19
---	----

1. Konvergente Reihen komplexer Zahlen – 2. Absolut konvergente Reihen. Majorantenkriterium – 3. Umordnungssatz – 4. Historisches zur absoluten Konvergenz – 5. Bemerkungen zum Riemannschen Umordnungssatz –
6. Reihenproduktsatz

§ 5. Stetige Funktionen	25
-----------------------------------	----

1. Stetigkeitsbegriff – 2. Die \mathbb{C} -Algebra $\mathcal{C}(X)$ – 3. Historisches zum Funktionsbegriff – 4. Historisches zum Stetigkeitsbegriff

§ 6. Zusammenhängende Räume. Gebiete in \mathbb{C}	29
--	----

1. Lokal-konstante Funktionen. Zusammenhangsbegriff – 2. Wege und Wegzusammenhang – 3. Gebiete in \mathbb{C} – 4. Zusammenhangskomponenten von Bereichen – 5. Rand und Randabstand

<i>Kapitel 1. Komplexe Differentialrechnung</i>	34
---	----

§ 1. Komplex differenzierbare Funktionen	35
--	----

1. Komplexe Differenzierbarkeit – 2. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen – 3. Historisches zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

§ 2.	Komplexe und reelle Differenzierbarkeit	38
1.	Charakterisierung komplex differenzierbarer Funktionen - 2. Ein hinreichendes Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit - 3. Beispiele zu den Cauchy-Riemannschen Gleichungen - 4* Harmonische Funktionen	
§ 3.	Holomorphe Funktionen	43
1.	Differentiationsregeln - 2. Die \mathbb{C} -Algebra $\mathcal{C}(D)$ - 3. Charakterisierung lokal-konstanter Funktionen - 4. Historisches zur Notation	
§ 4.	Partielle Differentiation nach x, y, z und \bar{z}	47
1.	Die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$ - 2. Beziehungen zwischen den Ableitungen $u_x, u_y, v_x, v_y, f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$ - 3. Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ - 4. Kalkül der Differentialoperatoren ∂ und $\bar{\partial}$	
<i>Kapitel 2. Holomorphie und Winkeltreue. Biholomorphe Abbildungen</i>		53
§ 1.	Holomorphe Funktionen und Winkeltreue	54
1.	Winkeltreue, Holomorphie und Antiholomorphie - 2. Winkel- und Orientierungstreue, Holomorphie - 3. Geometrische Deutung der Winkeltreue - 4. Zwei Beispiele - 5. Historisches zur Winkeltreue	
§ 2.	Biholomorphe Abbildungen	59
1.	Komplexe 2×2 Matrizen und biholomorphe Abbildungen - 2. Die biholomorphe Cayleyabbildung $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ - 3. Bemerkungen zur Cayleyabbildung - 4* Bijektive holomorphe Abbildungen von \mathbb{H} und von \mathbb{E} auf die geschlitzte Ebene	
§ 3.	Automorphismen der oberen Halbebene und des Einheitskreises	63
1.	Automorphismen von \mathbb{H} - 2. Automorphismen von \mathbb{E} - 3. Die Schreibweise $\eta \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$ für Automorphismen von \mathbb{E} - 4. Homogenität von \mathbb{E} und \mathbb{H}	
<i>Kapitel 3. Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie</i>		67
§ 1.	Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz	68
1.	Gleichmäßige Konvergenz - 2. Lokal-gleichmäßige Konvergenz - 3. Kompakte Konvergenz - 4. Historisches zur gleichmäßigen Konvergenz	
§ 2.	Konvergenzkriterien	72
1.	Cauchysches Konvergenzkriterium - 2. Weierstraßsches Majorantenkriterium	
§ 3.	Normal konvergente Reihen	74
1.	Normale Konvergenz - 2. Diskussion der normalen Konvergenz - 3. Historisches zur normalen Konvergenz	
<i>Kapitel 4. Potenzreihen</i>		77
§ 1.	Konvergenzkriterien	77
1.	Abelsches Konvergenzlemma - 2. Konvergenzradius - 3. Formel von CAUCHY-HADAMARD - 4. Quotientenkriterium - 5. Historisches zu konvergenten Potenzreihen	

§ 2.	Beispiele konvergenter Potenzreihen	81
	1. Exponentialreihe und trigonometrische Reihen. Eulersche Formel - 2. Logarithmische Reihe und Arcustangensreihe - 3. Binomische Reihe - 4* Konvergenzverhalten auf dem Rand - 5* Abelscher Stetigkeitssatz	
§ 3.	Holomorphie von Potenzreihen	86
	1. Formale gliedweise Differentiation und Integration - 2. Holomorphie von Potenzreihen. Vertauschungssatz - 3. Historisches zur gliedweisen Differen- tiation von Reihen - 4. Beispiele holomorpher Funktionen	
§ 4.	Struktur der Algebra der konvergenten Potenzreihen	90
	1. Ordnungsfunktion - 2. Einheitsatz - 3. Normalform konvergenter Po- tenzreihen - 4. Bestimmung aller Ideale	
<i>Kapitel 5. Elementar-transzendente Funktionen</i>		94
§ 1.	Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	94
	1. Charakterisierung von $\exp z$ durch die Differentialgleichung - 2. Addi- tionstheorem der Exponentialfunktion - 3. Bemerkungen zum Additions- theorem - 4. Additionstheoreme für $\cos z$ und $\sin z$ - 5. Historisches zu $\cos z$ und $\sin z$ - 6. Hyperbolische Funktionen	
§ 2.	Epimorphiesatz für $\exp z$ und Folgerungen	98
	1. Epimorphiesatz - 2. Die Gleichung $\text{Kern}(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z}$ - 3. Periodizität von $\exp z$ - 4. Wertevorrat, Nullstellen und Periodizität von $\cos z$ und $\sin z$ - 5. Cotangens- und Tangensfunktion. Arcustangensreihe - 6. Die Gleichung $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$	
§ 3.	Polarkoordinaten, Einheitswurzeln und natürliche Grenzen	104
	1. Polarkoordinaten - 2. Einheitswurzeln - 3. Singuläre Punkte und natürli- che Grenzen - 4. Historisches zu natürlichen Grenzen	
§ 4.	Logarithmusfunktionen	108
	1. Definition und elementare Eigenschaften - 2. Existenz von Logarithmus- funktionen - 3. Die Eulersche Folge $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ - 4. Hauptzweig des Logarith- mus - 5. Historisches zur Logarithmusfunktion im Komplexen	
§ 5.	Diskussion von Logarithmusfunktionen	113
	1. Zu den Identitäten $\log(wz) = \log w + \log z$ und $\log(\exp z) = z$ - 2. Logarith- mus und Arcustangens - 3. Potenzfunktionen. Formel von NEWTON-ABEL - 4. Die Riemannsche ζ -Funktion	

Teil B. Cauchysche Funktionentheorie

<i>Kapitel 6. Komplexe Integralrechnung</i>		117
§ 0.	Integration in reellen Intervallen	118
	1. Integralbegriff. Rechenregeln und Standardabschätzung - 2. Fundamentäl- satz der Differential- und Integralrechnung	
§ 1.	Wegintegrale in \mathbb{C}	120
	1. Stetig und stückweise stetig differenzierbare Wege - 2. Integration längs Wegen - 3. Die Integrale $\int_{\gamma} (\zeta - c)^n d\zeta$ - 4. Historisches zur Integration im	

X Inhaltsverzeichnis

	Komplexen - 5. Unabhängigkeit von der Parametrisierung - 6. Zusammenhang mit reellen Kurvenintegralen	
§ 2.	Eigenschaften komplexer Wegintegrale	126
	1. Rechenregeln - 2. Standardabschätzung - 3. Vertauschungssätze - 4. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$	
§ 3.	Wegunabhängigkeit von Integralen. Stammfunktionen	130
	1. Stammfunktionen - 2. Allgemeines Integrabilitätskriterium - 3. Integrabilitätskriterium für Sterngebiete	
	<i>Kapitel 7. Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung</i>	136
§ 1.	Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete	136
	1. Integrallemma von GOURSAT - 2. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete - 3. Historisches zum Integralsatz - 4. Historisches zum Integrallemma - 5* Reeller Beweis des Integrallemmas - 6* Die Fresnelschen Integrale	
§ 2.	Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben	143
	1. Verschärfung des Cauchyschen Integralsatzes für Sterngebiete - 2. Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben - 3. Historisches zur Integralformel - 4* Die Cauchysche Integralformel für reell stetig differenzierbare Funktionen - 5* Schwarzsche Integralformel	
§ 3.	Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen	148
	1. Entwicklungssatz von CAUCHY-TAYLOR - 2. Historisches zum Entwicklungssatz - 3. Riemannscher Fortsetzungssatz - 4. Cauchysche Integralformeln für Ableitungen	
§ 4.	Diskussion des Entwicklungssatzes	153
	1. Holomorphie und unendlich häufige komplexe Differenzierbarkeit - 2. Umbildungssatz - 3. Analytische Fortsetzung - 4. Produktsatz für Potenzreihen - 5. Bestimmung von Konvergenzradien	
§ 5*	Spezielle Taylorreihen. Bernoullische Zahlen	157
	1. Taylorreihe von $z(e^z - 1)^{-1}$. Bernoullische Zahlen - 2. Taylorreihen von $z \cot z$, $\tan z$ und $\frac{z}{\sin z}$ - 3. Potenzsummen und Bernoullische Zahlen - 4. Bernoullische Polynome	

Teil C. Cauchy-Weierstraß-Riemannsche Funktionentheorie

	<i>Kapitel 8. Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen</i>	162
§ 1.	Identitätssatz	162
	1. Identitätssatz - 2. Historisches zum Identitätssatz - 3. Diskretheit und Abzählbarkeit der a -Stellen - 4. Nullstellenordnung und Vielfachheit - 5. Existenz singulärer Punkte	
§ 2.	Der Holomorphiebegriff	168
	1. Holomorphie, lokale Integrabilität und konvergente Potenzreihen - 2. Holomorphie, Winkel- und Orientierungstreue (endgültige Fassung) - 3. Cauchyscher, Riemannscher und Weierstraßscher Standpunkt. Das Glaubensbekenntnis von WEIERSTRASS	

§ 3.	Cauchysche Abschätzungen und Ungleichungen für Taylorkoeffizienten	172
	1. Cauchysche Abschätzungen für Ableitungen - 2. Gutzmersche Formel - 3. Ganze Funktionen. Satz von LIOUVILLE - 4. Historisches zu den Cauchyschen Ungleichungen und zum Satz von LIOUVILLE - 5* Beweis der Cauchyschen Ungleichungen nach WEIERSTRASS	177
§ 4.	Konvergenzsatz von WEIERSTRASS	183
	1. Weierstraßscher Konvergenzsatz - 2. Differentiationssätze für Reihen - 3. Weierstraßscher Doppelreihensatz - 4* Eine Bemerkung WEIERSTRASS' zur Holomorphie - 5* Eine Konstruktion von WEIERSTRASS	187
§ 5.	Offenheitssatz und Maximumprinzip	187
	1. Offenheitssatz - 2. Maximumprinzip - 3. Historisches zum Maximumprinzip - 4. Verschärfung des Weierstraßschen Konvergenzsatzes	187
<i>Kapitel 9. Miscellanea</i>		187
§ 1.	Fundamentalsatz der Algebra	190
	1. Fundamentalsatz der Algebra - 2. Vier Beweise des Fundamentalsatzes - 3. Satz von GAUSS über die Lage der Nullstellen von Ableitungen	194
§ 2.	Schwarzsches Lemma und die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{E}$, $\text{Aut } \mathbb{H}$	194
	1. Schwarzsches Lemma - 2. Mittelpunktstreue Automorphismen von \mathbb{E} . Die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{E}$ und $\text{Aut } \mathbb{H}$ - 3. Fixpunkte von Automorphismen - 4. Satz von PICK - 5. Historisches zum Schwarzschen und zum Pickschen Lemma	194
§ 3.	Holomorphe Logarithmen und holomorphe Wurzeln	194
	1. Logarithmische Ableitung. Existenz holomorpher Logarithmusfunktionen - 2. Holomorphe Wurfelfunktionen - 3. Die Gleichung $f(z) = f(c) \exp \int \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$	194
§ 4.	Biholomorphe Abbildungen. Lokale Normalform	194
	1. Biholomorphiekriterium - 2. Lokale Injektivität und lokal-biholomorphe Abbildungen - 3. Lokale Normalform - 4. Geometrische Interpretation der lokalen Normalform	202
§ 5*	Asymptotische Potenzreihenentwicklungen	210
	1. Definition und elementare Eigenschaften - 2. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz asymptotischer Entwicklungen - 3. Asymptotische Entwicklungen und Differentiation - 4. Satz von RITT - 5. Satz von E. BOREL	210
<i>Kapitel 10. Isolierte Singularitäten. Meromorphe Funktionen</i>		210
§ 1.	Isolierte Singularitäten	215
	1. Hebbare Singularitäten. Pole - 2. Entwicklung von Funktionen um Polstellen - 3. Wesentliche Singularitäten. Satz von CASORATI und WEIERSTRASS - 4. Historisches zur Charakterisierung isolierter Singularitäten	215
§ 2*	Automorphismen punktierter Bereiche	215
	1. Isolierte Singularitäten holomorpher Injektionen - 2. Die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{C}$ und $\text{Aut } \mathbb{C}^*$ - 3. Automorphismen punktierter beschränkter Bereiche - 4. Starre Gebiete	215

§ 3.	Meromorphe Funktionen	219
	1. Definition der Meromorphie – 2. Die \mathbb{C} -Algebra $\mathcal{M}(D)$ der in D meromorphen Funktionen – 3. Division von meromorphen Funktionen – 4. Weitere Eigenschaften – 5. Die Ordnungsfunktion α_c	

Kapitel 11. Konvergente Reihen meromorpher Funktionen 224

§ 1.	Allgemeine Konvergenztheorie	224
	1. Kompakte und normale Konvergenz – 2. Rechenregeln – 3. Beispiele	
§ 2.	Die Partialbruchentwicklung von $\pi \cot \pi z$	228
	1. Cotangens und Verdopplungsformel. Die Identität $\pi \cot \pi z = \varepsilon_1(z)$ – 2. Historisches zur Cotangensreihe und zu ihrem Beweis – 3. Partialbruchreihen für $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ und $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ – 4* Charakterisierung des Cotangens durch sein Additionstheorem bzw. seine Differentialgleichung	
§ 3.	Die Eulerschen Formeln für $\sum_1 \frac{1}{v^{2n}}$	232
	1. Entwicklung von $\varepsilon_1(z)$ um 0 und Eulersche Formeln für $\zeta(2n)$ – 2. Historisches zu den Eulerschen $\zeta(2n)$ -Formeln – 3. Differentialgleichung für ε_1 und eine Identität für Bernoullische Zahlen – 4. Die Eisensteinreihen $\varepsilon_k(z) := \sum_{v \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+v)^k}$	
§ 4*	EISENSTEIN-Theorie trigonometrischer Funktionen.	235
	1. Additionstheorem – 2. Eisensteins Grundformeln – 3. Weitere Eisenstein-Formeln und die Identität $\varepsilon_1(z) = \pi \cot \pi z$ – 4. Skizze der Theorie der Kreisfunktionen nach EISENSTEIN	

Kapitel 12. Laurentreihen und Fourierreihen 242

§ 1.	Holomorphe Funktionen in Kreisingen und Laurentreihen	242
	1. Cauchytheorie für Kreisinge – 2. Laurentdarstellung in Kreisingen – 3. Laurententwicklungen – 4. Beispiele – 5. Historisches zum Satz von LAURENT	
§ 2.	Eigenschaften von Laurentreihen	250
	1. Konvergenzsatz und Identitätssatz – 2. Gutzmersche Formel und Cauchy-sche Ungleichungen – 3. Charakterisierung isolierter Singularitäten	
§ 3.	Periodische holomorphe Funktionen und Fourierreihen	253
	1. Variante des Riemannschen Fortsetzungssatzes – 2. Streifengebiete und Kreisinge – 3. Periodische holomorphe Funktionen in Streifengebieten – 4. Fourierentwicklung in Streifengebieten – 5. Beispiele – 6. Historisches zu Fourierreihen	
§ 4.	Die Thetafunktion	258
	1. Konvergenzsatz – 2. Konstruktion doppelt-periodischer Funktionen – 3. Die Fourierreihe von $e^{-z^2\pi\tau} \vartheta(i\tau, \tau)$ – 4. Transformationsformel der Thetafunktion – 5. Historisches zur Thetafunktion – 6. Über das Fehlerintegral	

<i>Kapitel 13. Residuenkalkül</i>	267
§ 1. Elementare Indextheorie und allgemeine Cauchysche Integralformel	267
1. Die Indexfunktion $\text{ind}_\gamma(z)$ - 2. Einfach geschlossene Wege - 3. Cauchysche Integralformel für nullhomologe Wege	
§ 2. Residuensatz	271
1. Das Residuum - 2. Beispiele - 3. Residuensatz - 4. Historisches zum Residuensatz	
§ 3. Folgerungen aus dem Residuensatz	276
1. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - a} d\zeta$ - 2. Anzahlformel für Null- und Polstellen - 3. Satz von ROUCHÉ - 4. Satz von HURWITZ - 5. Historisches zu den Sätzen von ROUCHÉ und HURWITZ	
<i>Kapitel 14. Bestimmte Integrale und Residuenkalkül</i>	282
§ 1. Berechnung von Integralen	282
0. Uneigentliche Integrale - 1. Trigonometrische Integrale	
$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ - 2. Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ - 3. Das Integral $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ für $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$	
§ 2. Weitere Integralauswertungen	287
1. Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} dx$ - 2. Uneigentliche Integrale $\int_0^{\infty} q(x) x^{a-1} dx$ - 3. Die Integrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx$	
§ 3. Gaußsche Summen	293
1. Abschätzung von $\frac{e^{u^2}}{e^z - 1}$ für $0 \leq u \leq 1$ - 2. Berechnung der Gaußschen Summen $G_n := \sum_{v=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} v^2}$, $n \geq 1$ - 3. Direkter residuentheoretischer Beweis der Formel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ - 4. Fourierreihen der Bernoullischen Polynome	
<i>Kurzbiographien von ABEL, CAUCHY, EISENSTEIN, EULER, RIEMANN und WEIERSTRASS</i>	299
<i>Literatur</i>	303
Klassische Literatur zur Funktionentheorie - Lehrbuchliteratur zur Funktionentheorie - Literatur zur Geschichte der Funktionentheorie und der Mathematik	
<i>Symbolverzeichnis</i>	311
<i>Namenverzeichnis</i>	312
<i>Sachverzeichnis</i>	315
<i>Porträts berühmter Mathematiker</i>	2, 241