

Inhaltsverzeichnis

Teil A. Unendliche Produkte und Partialbruchreihen

<i>Kapitel 1. Unendliche Produkte holomorpher Funktionen</i>	2
§1. Unendliche Produkte	3
1. Unendliche Produkte von Zahlen	3
2. Unendliche Produkte von Funktionen	4
§2. Normale Konvergenz	6
1. Normale Konvergenz	6
2. Normal konvergente Produkte holomorpher Funktionen	7
3. Logarithmische Differentiation	9
§3. Das Sinusprodukt $\sin \pi z = \pi z \prod_{v=1}^{\infty} (1 - z^2/v^2)$	10
1. Standardbeweis	10
2. Charakterisierung des Sinus durch die Verdopplungsformel	12
3. Beweis der EULERSchen Formel mit Hilfe von Lemma 2	13
4*. Beweis der Verdopplungsformel für das EULER-Produkt nach EISENSTEIN	14
5. Historisches zum Sinusprodukt	15
§4*. EULERSche Partitionsprodukte	16
1. Partitionen natürlicher Zahlen und EULERSche Produkte	17
2. Pentagonal-Zahlen-Satz. Rekursionsformeln für $p(n)$ und $\sigma(n)$	18
3. Potenzreihenentwicklung von $\prod(1 + q^v z)$ nach z	20
4. Historisches zu Partitionen und zum Pentagonal-Zahlen-Satz	21
§5*. JACOBIS Produktdarstellung der Reihe $J(z, q) := \sum_{v=-\infty}^{\infty} q^{v^2} z^v$	22
1. Theorem von JACOBI	23
2. Diskussion des JACOBISchen Theorems	24
3. Historisches zur JACOBISchen Identität	25
Literatur	27
<i>Kapitel 2. Die Gammafunktion</i>	29
§1. Die WEIERSTRASSsche Funktion $\varDelta(z) = ze^{z\pi} \prod_{v \geq 1} (1 + z/v)e^{-z/v}$	31
1. Die Hilfsfunktion $H(z) = z \prod_{v \geq 1} (1 + z/v)e^{-z/v}$	31
2. Die ganze Funktion $\varDelta(z) = e^{z\pi} H(z)$	33

XII Inhaltsverzeichnis

§2. Die Gammafunktion	34
1. Eigenschaften der Γ -Funktion	34
2. Historische Notizen	36
3. Die logarithmische Ableitung $\psi := \Gamma'/\Gamma$	37
4. Das Eindeutigkeitsproblem	38
5. Multiplikationsformeln	40
6*. Satz von HÖLDER	41
7*. Der Logarithmus der Γ -Funktion	42
§3. EULERSche und HANKELSche Integraldarstellung von $\Gamma(z)$	43
1. Konvergenz des EULERSchen Integrals	44
2. Satz von EULER	45
3*. Die Gleichung $\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-tr} dt = e^{-\pi iz/2} \Gamma(z)$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$	46
4*. Das HANKELSche Schleifenintegral	48
§4. Die STIRLINGsche Formel und GUDERMANNsche Reihe	50
1. Die Funktion $\mu(z)$	50
2. STIRLINGsche Formel	52
3. Beweis von Theorem 2	53
4. Wachstum von $ \Gamma(x+iy) $ für $ y \rightarrow \infty$	54
5*. Eine Integralformel für $\mu(z)$	55
6*. Die STIRLINGsche Reihe	56
§5*. Die Betafunktion	58
1. Beweis der EULERSchen Identität	58
2. Klassische Beweise der EULERSchen Identität	59
Literatur	61
<i>Kapitel 3. Ganze Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen</i>	63
§1. WEIERSTRASSscher Produktsatz für \mathbb{C}	63
1. Divisoren und Hauptdivisoren	64
2. WEIERSTRASS-Produkte	65
3. WEIERSTRASS-Faktoren	65
4. Produktsatz von WEIERSTRASS	66
5. Folgerungen	67
6. Historisches zum Produktsatz	68
§2. Diskussion des Produktsatzes	69
1. Kanonische Produkte	70
2. Drei klassische kanonische Produkte	71
3. Die σ -Funktion	71
4. Die \wp -Funktion	73
5*. Eine Bemerkung von HURWITZ	74
Literatur	75
<i>Kapitel 4*. Holomorphe Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen</i>	76
§1. Produktsatz für beliebige Bereiche	76
1. Konvergenzlemma	76

2. Produktsatz für spezielle Divisoren	77
3. Allgemeiner Produktsatz	78
4*. Zweiter Beweis des allgemeinen Produktsatzes	79
5. Folgerungen	79
§ 2. Anwendungen und Beispiele	80
1. Teilbarkeit in $\mathcal{O}(G)$. Größter gemeinsamer Teiler	81
2. Beispiele von WEIERSTRASS-Produkten	82
3. Ein Produkt von PICARD	83
4. Historisches zum allgemeinen Produktsatz	84
5. Ausblick auf mehrere Veränderliche	84
§ 3. Beschränkte Funktionen in \mathbb{E} und ihre Divisoren	85
1. Verallgemeinerung des SCHWARZSchen Lemmas	86
2. Notwendigkeit der BLASCHKE-Bedingung	86
3. BLASCHKE-Produkte	87
4. Beschränkte Funktionen in der rechten Halbebene	88
Anhang zum Paragraphen 3: Die JENSENSche Formel	89
Literatur	90
 <i>Kapitel 5. Satz von ISSSA. Holomorphiegebiete</i>	92
§ 1. Der Satz von ISSSA	92
1. Satz von BERS	92
2. Satz von ISSSA	93
3. Beweis des Lemmas	94
4. Historisches zu den Sätzen von BERS und ISSSA	95
5*. Bestimmung aller Bewertungen von $\mathcal{M}(G)$	95
§ 2. Holomorphiegebiete	96
1. Eine Konstruktion von GOURSAT	98
2. Gut verteilte Randmengen. Erster Beweis des Existenzsatzes	99
3. Diskussion des Begriffes Holomorphiegebiet	100
4. Randnahe Mengen. Zweiter Beweis des Existenzsatzes	101
5. Historisches zum Begriff des Holomorphiegebietes	102
6. Ausblick auf mehrere Veränderliche	103
§ 3. Einfache Beispiele von Holomorphiegebieten	104
1. Beispiele für \mathbb{E}	104
2. Liftingssatz	105
3. CASSINI-Bereiche und Holomorphiegebiete	105
Literatur	106
 <i>Kapitel 6. Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen</i>	108
§ 1. Satz von MITTAG-LEFFLER für \mathbb{C}	108
1. Hauptteil-Verteilungen	109
2. MITTAG-LEFFLER-Reihen	110
3. Satz von MITTAG-LEFFLER	110
4. Folgerungen	111

5. Kanonische MITTAG-LEFFLER-Reihen. Beispiele	112
6. Historisches zum Satz von MITTAG-LEFFLER für \mathbb{C}	112
§2. Satz von MITTAG-LEFFLER für beliebige Bereiche	113
1. Spezielle Hauptteil-Verteilungen	113
2. Allgemeiner Satz von MITTAG-LEFFLER	114
3. Folgerungen	115
4. Historisches zum allgemeinen Satz von MITTAG-LEFFLER	116
5. Ausblicke auf mehrere Veränderliche	117
§3*. Idealtheorie in Ringen holomorpher Funktionen	117
1. Nicht endlich erzeugbare Ideale in $\mathcal{O}(G)$	118
2. Lemma von WEDDERBURN (Darstellung der Eins)	118
3. Lineare Darstellung des ggT. Hauptidealsatz	119
4. Nullstellenfreie Ideale	120
5. Hauptsatz der Idealtheorie für $\mathcal{O}(G)$	121
6. Historisches zur Idealtheorie holomorpher Funktionen	122
7. Ausblicke auf mehrere Veränderliche	122
Literatur	123

Teil B. Abbildungstheorie

Kapitel 7. Die Sätze von Montel und Vitali	126
§1. Der Satz von MONTEL	126
1. Satz von MONTEL für Folgen	127
2. Beweis des Satzes von MONTEL	128
3. MONTELSCHES Konvergenzkriterium	129
4. Satz von VITALI	129
5*. Punktweise konvergente Folgen holomorpher Funktionen	130
§2. Normale Familien	131
1. Satz von MONTEL für normale Familien	131
2. Diskussion des MONTELSCHEN Satzes	132
3. Historisches zum Satz von MONTEL	133
4*. Quadrat-integrable Funktionen und normale Familien	133
§3*. Der Satz von VITALI	134
1. Konvergenzlemma	135
2. Spezialfall des Satzes von VITALI	136
3. Satz von VITALI (endgültige Fassung)	137
4. Historisches zum Satz von VITALI	138
§4*. Anwendungen des Satzes von VITALI	139
1. Vertauschung von Integration und Differentiation	139
2. Kompakte Konvergenz des Γ -Integrals	140
3. Satz von MÜNTZ	140
§5. Folgerungen aus einem Satz von HURWITZ	142
Literatur	143

<i>Kapitel 8. Der Riemannsche Abbildungssatz</i>	145
§1. Integralsätze für homotope Wege	146
1. Homotope Wege bei festen Endpunkten	146
2. Frei homotope geschlossene Wege	147
3. Nullhomotopie und Nullhomologie	148
4. Einfach zusammenhängende Gebiete	149
5*. Reduktion des Integralsatzes 1 auf ein Lemma	149
6*. Beweis von Lemma 5*	150
§2. Der RIEMANNSCHE Abbildungssatz	152
1. Reduktion auf Q -Gebiete	153
2. Existenz holomorpher Injektionen	153
3. Existenz von Dehnungen	154
4. Existenzbeweis mittels eines Extremalprinzips	155
5. Zur Eindeutigkeit der Abbildungsfunktion	156
6. Äquivalenztheorem	156
§3. Zur Geschichte des RIEMANNSCHEN Abbildungssatzes	157
1. RIEMANN Dissertation	157
2. Frühgeschichte	158
3. Von CARATHÉODORY-KOEBE zu FEJÉR-RIESZ	160
4. Der finale Beweis von CARATHÉODORY	161
5. Historisches zum Randverhalten und zur Eindeutigkeit	162
6. Ausblick auf mehrere Veränderliche	162
§4. Isotropiegruppen einfach zusammenhängender Gebiete	163
1. Beispiele	163
2. Die Gruppe $\text{Aut}_s G$ für einfach zusammenhängende Gebiete $G \neq \mathbb{C}$	164
3*. Abbildungsradius. Monotoniesatz	165
<i>Anhang zu Kapitel 8: CARATHÉODORY-KOEBE-Theorie</i>	166
§1. Einfache Eigenschaften von Dehnungen	166
1. Dehnungslemma	166
2. Zulässige Dehnungen. Quadratwurzel-Verfahren	167
3*. Die Mondsichel-Dehnung	168
§2. Der CARATHÉODORY-KOEBE-Algorithmus	169
1. Eigenschaften von Dehnungsfolgen	169
2. Konvergenzsatz	169
3. KOEBE-Familien und KOEBE-Folgen	170
4. Resümee. Konvergenzgüte	171
5. Historisches: Der Wettstreit zwischen CARATHÉODORY und KOEBE	171
§3. Die KOEBE-Familien \mathcal{K}_m und \mathcal{K}_∞	172
1. Ein Lemma	173
2. Die Familien \mathcal{K}_m und \mathcal{K}_∞	173
<i>Literatur zu Kapitel 8 und zum Anhang</i>	175

XVI Inhaltsverzeichnis

<i>Kapitel 9. Automorphismen und endliche innere Abbildungen</i>	177
§1. Innere Abbildungen und Automorphismen	177
1. Konvergente Folgen in $\text{Hol } G$ und $\text{Aut } G$	177
2. Konvergenzsatz für Folgen von Automorphismen	178
3. Beschränkte homogene Gebiete	179
4*. Innere Abbildungen von \mathbb{H} und Homothetien	179
§2. Iteration innerer Abbildungen	180
1. Elementare Eigenschaften	180
2. Satz von H. CARTAN	181
3. Die Gruppe $\text{Aut}_a G$ für beschränkte Gebiete	182
4. Die abgeschlossenen Untergruppen der Kreisgruppe	183
5*. Automorphismen von Gebieten mit Löchern. Ringsatz	183
§3. Endliche holomorphe Abbildungen	184
1. Drei allgemeine Eigenschaften	185
2. Endliche innere Abbildungen von \mathbb{E}	185
3. Randlemma für Kreisringe	186
4. Endliche innere Abbildungen von Kreisringen	188
5. Bestimmung aller endlichen Abbildungen zwischen Kreisringen	189
§4*. Satz von RADÓ. Abbildungsgrad	190
1. Abgeschlossene Abbildungen. Äquivalenzsatz	190
2. Windungsabbildungen	191
3. Satz von RADÓ	192
4. Abbildungsgrad	193
5. Ausblicke	193
Literatur	194

Teil C. Selecta

<i>Kapitel 10. Sätze von BLOCH, PICARD und SCHOTTKY</i>	196
§1. Satz von BLOCH	196
1. Beweisvorbereitung	197
2. Beweis des Satzes von BLOCH	198
3*. Verbesserung der Schranke durch Lösen eines Extremalproblems	199
4*. Satz von AHLFORS	200
5*. LANDAUS Weltkonstanten	202
§2. Kleiner Satz von PICARD	203
1. Darstellung von Funktionen, die zwei Werte auslassen	203
2. Beweis des kleinen PICARDSCHEN Satzes	205
3. Zwei amüsante Anwendungen	205
§3. Satz von SCHOTTKY und Folgerungen	207
1. Beweis des SCHOTTKYSCHEN Satzes	207

2. LANDAUS Verschärfung des kleinen PICARDSchen Satzes	208
3. Verschärfung der Sätze von MONTEL und VITALI	208
§4. Großer Satz von PICARD	209
1. Beweis des großen PICARDSchen Satzes	210
2. Historisches zu den Sätzen dieses Kapitels	210
Literatur	210
<i>Kapitel 11. Randverhalten von Potenzreihen</i>	212
§1. Konvergenz auf dem Rand	212
1. Sätze von FATOU, M. RIESZ und OSTROWSKI	213
2. Ein Lemma von M. RIESZ	214
3. Beweis der Sätze aus 1	215
4. Ein Kriterium für Nichtfortsetzbarkeit	216
Literatur	217
§2. Theorie der Überkonvergenz. Lückensatz	217
1. Überkonvergente Potenzreihen	218
2. Überkonvergenzsatz von OSTROWSKI	219
3. Lückensatz von HADAMARD	220
4. PORTERS Konstruktion überkonvergenter Reihen	221
5. Historisches zum Lückensatz	221
6. Historisches zur Überkonvergenz	222
7. Ausblicke	223
Literatur	223
§3. Ein Satz von FATOU-HURWITZ-PÓLYA	224
1. Der HURWITZsche Beweis	225
2. Ausblicke	226
Literatur	226
§4. Ein Fortsetzungssatz von SZEGÖ	227
1. Vorbereitungen zum Beweis von (Sz)	227
2. Ein Hilfssatz	229
3. Beweis von (Sz)	229
4. Eine Anwendung	230
5. Ausblicke	231
Literatur	232
<i>Kapitel 12. Runge-Theorie für Kompakta</i>	233
§1. Hilfsmittel	234
1. CAUCHYSche Integralformel für Kompakta	234
2. Approximation durch rationale Funktionen	236
3. Polstellenverschiebungssatz	237
§2. RUNGE-Theorie für Kompakta	239
1. Approximationssätze von RUNGE	239
2. Folgerungen aus dem kleinen Satz von RUNGE	240
3. Hauptsatz der RUNGE-Theorie für Kompakta	241

XVIII Inhaltsverzeichnis

§3. Anwendungen des kleinen Satzes von RUNGE	243
1. Punktweise konvergente Polynomfolgen, die nicht überall kompakt konvergieren	243
2. Holomorphe Einbettung des Einheitskreises in den \mathbb{C}^3	246
§4. Diskussion der CAUCHYSchen Integralformel für Kompakta	248
1. Finale Form von Satz 1.1	248
2. Umlaufungssatz	250
Literatur	251
 <i>Kapitel 13. Runge-Theorie für Bereiche</i>	253
§1. Die RUNGESchen Sätze für Bereiche	254
1. Auffüllung von Kompakta. RUNGES Beweis des Satzes von MITTAG-LEFFLER	254
2. Approximationssätze von RUNGE	255
3. Hauptsatz der CAUCHYSchen Funktionentheorie	256
4. Zur Theorie der Löcher	257
5. Historisches zur RUNGE-Theorie	258
§2. RUNGESche Paare	258
1. Topologische Charakterisierung RUNGEScher Paare	259
2. RUNGESche Hülle	260
3. Homologische Charakterisierung RUNGEScher Paare. Satz von BEHNKE-STEIN	260
4. RUNGESche Bereiche	261
5*. Approximation und holomorphe Fortsetzbarkeit	262
§3. Holomorph-konvexe Hüllen und RUNGESche Paare	263
1. Eigenschaften des Hüllenoperators	263
2. Charakterisierung RUNGEScher Paare mittels holomorph-konvexer Hüllen	265
Anhang: Über Komponenten lokal kompakter Räume. Satz von ŠURA-BURA	266
1. Komponenten	266
2. Existenz offener Kompakta	267
3. Auffüllungen	268
4. Beweis des Satzes von ŠURA-BURA	268
Literatur	269
 <i>Kapitel 14. Invarianz der Löcherzahl</i>	271
§1. Homologietheorie. Trennungslemma	271
1. Homologiegruppen. BETTI-Zahl	271
2. Induzierte Homomorphismen. Natürliche Eigenschaften	272
3. Trennung von Löchern durch geschlossene Wege	274

§ 2. Invarianz der Löcherzahl. Produktsatz für Einheiten	274
1. Zur Struktur der Homologiegruppe	275
2. Löcherzahl und Betti-Zahl	276
3. Normalformen mehrfach zusammenhängender Gebiete (Bericht)	277
4. Zur Struktur der multiplikativen Gruppe $\mathcal{O}(G)^\times$	277
5. Ausblicke	279
Literatur	279
<i>Kurzbiographien</i>	281
<i>Porträts berühmter Mathematiker</i>	286
<i>Symbolverzeichnis</i>	287
<i>Namenverzeichnis</i>	288
<i>Sachverzeichnis</i>	291