

# Inhaltsverzeichnis

## Teil A. Unendliche Produkte und Partialbruchreihen

<i>Kapitel 1. Unendliche Produkte holomorpher Funktionen</i> . . . . .	2
§ 1. Unendliche Produkte . . . . .	3
1. Unendliche Produkte von Zahlen . . . . .	3
2. Unendliche Produkte von Funktionen . . . . .	4
§ 2. Normale Konvergenz . . . . .	6
1. Normale Konvergenz . . . . .	6
2. Normal konvergente Produkte holomorpher Funktionen . . . . .	7
3. Logarithmische Differentiation . . . . .	9
§ 3. Das Sinusprodukt $\sin \pi z = \pi z \prod_{v=1}^{\infty} (1 - z^2/v^2)$ . . . . .	10
1. Standardbeweis . . . . .	10
2. Charakterisierung des Sinus durch die Verdopplungsformel . . . . .	12
3. Beweis der EULERSchen Formel mit Hilfe von Lemma 2 . . . . .	13
4*. Beweis der Verdopplungsformel für das EULER-Produkt nach EISENSTEIN . . . . .	14
5. Historisches zum Sinusprodukt . . . . .	15
§ 4*. EULERSche Partitionsprodukte . . . . .	16
1. Partitionen natürlicher Zahlen und EULERSche Produkte . . . . .	17
2. Pentagonal-Zahlen-Satz. Rekursionsformeln für $p(n)$ und $\sigma(n)$ . . . . .	18
3. Potenzreihenentwicklung von $\prod (1 + q^v z)$ nach $z$ . . . . .	20
4. Historisches zu Partitionen und zum Pentagonal-Zahlen-Satz . . . . .	21
§ 5*. JACOBI'S Produktdarstellung der Reihe $J(z, q) := \sum_{v=-\infty}^{\infty} q^{v^2} z^v$ . . . . .	22
1. Theorem von JACOBI . . . . .	23
2. Diskussion des JACOBISchen Theorems . . . . .	24
3. Historisches zur JACOBISchen Identität . . . . .	25
Literatur . . . . .	27
 <i>Kapitel 2. Die Gammafunktion</i> . . . . .	 29
§ 1. Die WEIERSTRASSSche Funktion $\Delta(z) = ze^{\gamma z} \prod_{v \geq 1} (1 + z/v)e^{-z/v}$ . . . . .	31
1. Die Hilfsfunktion $H(z) = z \prod_{v \geq 1} (1 + z/v)e^{-z/v}$ . . . . .	31
2. Die ganze Funktion $\Delta(z) = e^{\gamma z} H(z)$ . . . . .	33

§ 2. Die Gammafunktion . . . . .	34
1. Eigenschaften der $\Gamma$ -Funktion . . . . .	34
2. Historische Notizen . . . . .	36
3. Die logarithmische Ableitung $\psi := \Gamma'/\Gamma$ . . . . .	37
4. Das Eindeutigkeitsproblem . . . . .	38
5. Multiplikationsformeln . . . . .	40
6*. Satz von HÖLDER . . . . .	41
7*. Der Logarithmus der $\Gamma$ -Funktion . . . . .	42
§ 3. EULERSche und HANKELSche Integraldarstellung von $\Gamma(z)$ . . . . .	43
1. Konvergenz des EULERSchen Integrals . . . . .	44
2. Satz von EULER . . . . .	45
3*. Die Gleichung $\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = e^{-\pi iz/2} \Gamma(z)$ , $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . . . . .	46
4*. Das HANKELSche Schleifenintegral . . . . .	48
§ 4. Die STIRLINGSche Formel und GUDERMANNSSche Reihe . . . . .	50
1. Die Funktion $\mu(z)$ . . . . .	50
2. STIRLINGSche Formel . . . . .	52
3. Beweis von Theorem 2 . . . . .	53
4. Wachstum von $ \Gamma(x + iy) $ für $ y  \rightarrow \infty$ . . . . .	54
5*. Eine Integralformel für $\mu(z)$ . . . . .	55
6*. Die STIRLINGSche Reihe . . . . .	56
§ 5*. Die Betafunktion . . . . .	58
1. Beweis der EULERSchen Identität . . . . .	58
2. Klassische Beweise der EULERSchen Identität . . . . .	59
Literatur . . . . .	61
<i>Kapitel 3. Ganze Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen</i> . . . . .	63
§ 1. WEIERSTRASScher Produktsatz für $\mathbb{C}$ . . . . .	63
1. Divisoren und Hauptdivisoren . . . . .	64
2. WEIERSTRASS-Produkte . . . . .	65
3. WEIERSTRASS-Faktoren . . . . .	65
4. Produktsatz von WEIERSTRASS . . . . .	66
5. Folgerungen . . . . .	67
6. Historisches zum Produktsatz . . . . .	68
§ 2. Diskussion des Produktsatzes . . . . .	69
1. Kanonische Produkte . . . . .	70
2. Drei klassische kanonische Produkte . . . . .	71
3. Die $\sigma$ -Funktion . . . . .	71
4. Die $\wp$ -Funktion . . . . .	73
5*. Eine Bemerkung von HURWITZ . . . . .	74
Literatur . . . . .	75
<i>Kapitel 4*. Holomorphe Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen</i> . . . . .	76
§ 1. Produktsatz für beliebige Bereiche . . . . .	76
1. Konvergenzlemma . . . . .	76

2. Produktsatz für spezielle Divisoren . . . . .	77
3. Allgemeiner Produktsatz . . . . .	78
4*. Zweiter Beweis des allgemeinen Produktsatzes . . . . .	79
5. Folgerungen . . . . .	79
§2. Anwendungen und Beispiele . . . . .	80
1. Teilbarkeit in $\mathcal{O}(G)$ . Größter gemeinsamer Teiler . . . . .	81
2. Beispiele von WEIERSTRASS-Produkten . . . . .	82
3. Ein Produkt von PICARD . . . . .	83
4. Historisches zum allgemeinen Produktsatz . . . . .	84
5. Ausblick auf mehrere Veränderliche . . . . .	84
§3. Beschränkte Funktionen in $\mathbb{E}$ und ihre Divisoren . . . . .	85
1. Verallgemeinerung des SCHWARZschen Lemmas . . . . .	86
2. Notwendigkeit der BLASCHKE-Bedingung . . . . .	86
3. BLASCHKE-Produkte . . . . .	87
4. Beschränkte Funktionen in der rechten Halbebene . . . . .	88
Anhang zum Paragraphen 3: Die JENSENSche Formel . . . . .	89
Literatur . . . . .	90
 <i>Kapitel 5. Satz von ISS'SA. Holomorphiegebiete . . . . .</i>	 92
§1. Der Satz von ISS'SA . . . . .	92
1. Satz von BERS . . . . .	92
2. Satz von ISS'SA . . . . .	93
3. Beweis des Lemmas . . . . .	94
4. Historisches zu den Sätzen von BERS und ISS'SA . . . . .	95
5*. Bestimmung aller Bewertungen von $\mathcal{M}(G)$ . . . . .	95
§2. Holomorphiegebiete . . . . .	96
1. Eine Konstruktion von GOURSAT . . . . .	98
2. Gut verteilte Randmengen. Erster Beweis des Existenzsatzes . . . . .	99
3. Diskussion des Begriffes Holomorphiegebiet . . . . .	100
4. Randnahe Mengen. Zweiter Beweis des Existenzsatzes . . . . .	101
5. Historisches zum Begriff des Holomorphiegebietes . . . . .	102
6. Ausblick auf mehrere Veränderliche . . . . .	103
§3. Einfache Beispiele von Holomorphiegebieten . . . . .	104
1. Beispiele für $\mathbb{E}$ . . . . .	104
2. Liftungssatz . . . . .	105
3. CASSINI-Bereiche und Holomorphiegebiete . . . . .	105
Literatur . . . . .	106
 <i>Kapitel 6. Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen . . . . .</i>	 108
§1. Satz von MITTAG-LEFFLER für $\mathbb{C}$ . . . . .	108
1. Hauptteil-Verteilungen . . . . .	109
2. MITTAG-LEFFLER-Reihen . . . . .	110
3. Satz von MITTAG-LEFFLER . . . . .	110
4. Folgerungen . . . . .	111

5.	Kanonische MITTAG-LEFFLER-Reihen. Beispiele . . . . .	112
6.	Historisches zum Satz von MITTAG-LEFFLER für $\mathbb{C}$ . . . . .	112
§ 2.	Satz von MITTAG-LEFFLER für beliebige Bereiche . . . . .	113
1.	Spezielle Hauptteil-Verteilungen . . . . .	113
2.	Allgemeiner Satz von MITTAG-LEFFLER . . . . .	114
3.	Folgerungen . . . . .	115
4.	Historisches zum allgemeinen Satz von MITTAG-LEFFLER . . . . .	116
5.	Ausblicke auf mehrere Veränderliche . . . . .	117
§ 3*.	Idealtheorie in Ringen holomorpher Funktionen . . . . .	117
1.	Nicht endlich erzeugbare Ideale in $\mathcal{O}(G)$ . . . . .	118
2.	Lemma von WEDDERBURN (Darstellung der Eins) . . . . .	118
3.	Lineare Darstellung des ggT. Hauptidealsatz . . . . .	119
4.	Nullstellenfreie Ideale . . . . .	120
5.	Hauptsatz der Idealtheorie für $\mathcal{O}(G)$ . . . . .	121
6.	Historisches zur Idealtheorie holomorpher Funktionen . . . . .	122
7.	Ausblicke auf mehrere Veränderliche . . . . .	122
	Literatur . . . . .	123

## Teil B. Abbildungstheorie

<i>Kapitel 7. Die Sätze von Montel und Vitali</i> . . . . .	126
§ 1. Der Satz von MONTEL . . . . .	126
1. Satz von MONTEL für Folgen . . . . .	127
2. Beweis des Satzes von MONTEL . . . . .	128
3. MONTELSches Konvergenzkriterium . . . . .	129
4. Satz von VITALI . . . . .	129
5*. Punktweise konvergente Folgen holomorpher Funktionen . . . . .	130
§ 2. Normale Familien . . . . .	131
1. Satz von MONTEL für normale Familien . . . . .	131
2. Diskussion des MONTELSchen Satzes . . . . .	132
3. Historisches zum Satz von MONTEL . . . . .	133
4*. Quadrat-integriable Funktionen und normale Familien . . . . .	133
§ 3*. Der Satz von VITALI . . . . .	134
1. Konvergenzlemma . . . . .	135
2. Spezialfall des Satzes von VITALI . . . . .	136
3. Satz von VITALI (endgültige Fassung) . . . . .	137
4. Historisches zum Satz von VITALI . . . . .	138
§ 4*. Anwendungen des Satzes von VITALI . . . . .	139
1. Vertauschung von Integration und Differentiation . . . . .	139
2. Kompakte Konvergenz des $\Gamma$ -Integrals . . . . .	140
3. Satz von MÜNTZ . . . . .	140
§ 5. Folgerungen aus einem Satz von HURWITZ . . . . .	142
Literatur . . . . .	143

<i>Kapitel 8. Der Riemannsche Abbildungssatz</i> . . . . .	145
§ 1. Integralsätze für homotope Wege . . . . .	146
1. Homotope Wege bei festen Endpunkten . . . . .	146
2. Frei homotope geschlossene Wege . . . . .	147
3. Nullhomotopie und Nullhomologie . . . . .	148
4. Einfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	149
5*. Reduktion des Integralsatzes 1 auf ein Lemma . . . . .	149
6*. Beweis von Lemma 5* . . . . .	150
§ 2. Der RIEMANNSCHE Abbildungssatz . . . . .	152
1. Reduktion auf $Q$ -Gebiete . . . . .	153
2. Existenz holomorpher Injektionen . . . . .	153
3. Existenz von Dehnungen . . . . .	154
4. Existenzbeweis mittels eines Extremalprinzips . . . . .	155
5. Zur Eindeutigkeit der Abbildungsfunktion . . . . .	156
6. Äquivalenztheorem . . . . .	156
§ 3. Zur Geschichte des RIEMANNSCHEN Abbildungssatzes . . . . .	157
1. RIEMANN'S Dissertation . . . . .	157
2. Frühgeschichte . . . . .	158
3. Von CARATHÉODORY-KOEBE zu FEJÉR-RIESZ . . . . .	160
4. Der finale Beweis von CARATHÉODORY . . . . .	161
5. Historisches zum Randverhalten und zur Eindeutigkeit . . . . .	162
6. Ausblick auf mehrere Veränderliche . . . . .	162
§ 4. Isotropiegruppen einfach zusammenhängender Gebiete . . . . .	163
1. Beispiele . . . . .	163
2. Die Gruppe $\text{Aut}_d G$ für einfach zusammenhängende Gebiete $G \neq \mathbb{C}$ . . . . .	164
3*. Abbildungsradius. Monotoniesatz . . . . .	165
Anhang zu Kapitel 8: CARATHÉODORY-KOEBE-Theorie . . . . .	166
§ 1. Einfache Eigenschaften von Dehnungen . . . . .	166
1. Dehnungslemma . . . . .	166
2. Zulässige Dehnungen. Quadratwurzel-Verfahren . . . . .	167
3*. Die Mondsichel-Dehnung . . . . .	168
§ 2. Der CARATHÉODORY-KOEBE-Algorithmus . . . . .	169
1. Eigenschaften von Dehnungsfolgen . . . . .	169
2. Konvergenzsatz . . . . .	169
3. KOEBE-Familien und KOEBE-Folgen . . . . .	170
4. Resümee. Konvergenzgüte . . . . .	171
5. Historisches: Der Wettstreit zwischen CARATHÉODORY und KOEBE . . . . .	171
§ 3. Die KOEBE-Familien $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_\infty$ . . . . .	172
1. Ein Lemma . . . . .	173
2. Die Familien $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_\infty$ . . . . .	173
Literatur zu Kapitel 8 und zum Anhang . . . . .	175

<i>Kapitel 9. Automorphismen und endliche innere Abbildungen</i> . . . . .	177
§ 1. Innere Abbildungen und Automorphismen . . . . .	177
1. Konvergente Folgen in $\text{Hol } G$ und $\text{Aut } G$ . . . . .	177
2. Konvergenzsatz für Folgen von Automorphismen . . . . .	178
3. Beschränkte homogene Gebiete . . . . .	179
4*. Innere Abbildungen von $\mathbb{H}$ und Homothetien . . . . .	179
§ 2. Iteration innerer Abbildungen . . . . .	180
1. Elementare Eigenschaften . . . . .	180
2. Satz von H. CARTAN . . . . .	181
3. Die Gruppe $\text{Aut}_d G$ für beschränkte Gebiete . . . . .	182
4. Die abgeschlossenen Untergruppen der Kreisgruppe . . . . .	183
5*. Automorphismen von Gebieten mit Löchern. Ringsatz . . . . .	183
§ 3. Endliche holomorphe Abbildungen . . . . .	184
1. Drei allgemeine Eigenschaften . . . . .	185
2. Endliche innere Abbildungen von $\mathbb{E}$ . . . . .	185
3. Randlemma für Kreisringe . . . . .	186
4. Endliche innere Abbildungen von Kreisringen . . . . .	188
5. Bestimmung aller endlichen Abbildungen zwischen Kreisringen . . . . .	189
§ 4*. Satz von RADÓ. Abbildungsgrad . . . . .	190
1. Abgeschlossene Abbildungen. Äquivalenzsatz . . . . .	190
2. Windungsabbildungen . . . . .	191
3. Satz von RADÓ . . . . .	192
4. Abbildungsgrad . . . . .	193
5. Ausblicke . . . . .	193
Literatur . . . . .	194

## Teil C. Selecta

<i>Kapitel 10. Sätze von Bloch, Picard und Schottky</i> . . . . .	196
§ 1. Satz von BLOCH . . . . .	196
1. Beweisvorbereitung . . . . .	197
2. Beweis des Satzes von BLOCH . . . . .	198
3*. Verbesserung der Schranke durch Lösen eines Extremalproblems . . . . .	199
4*. Satz von AHLFORS . . . . .	200
5*. LANDAUS Weltkonstanten . . . . .	202
§ 2. Kleiner Satz von PICARD . . . . .	203
1. Darstellung von Funktionen, die zwei Werte auslassen . . . . .	203
2. Beweis des kleinen PICARDSchen Satzes . . . . .	205
3. Zwei amüsante Anwendungen . . . . .	205
§ 3. Satz von SCHOTTKY und Folgerungen . . . . .	207
1. Beweis des SCHOTTKYSchen Satzes . . . . .	207

2.	LANDAUS Verschärfung des kleinen PICARDSchen Satzes . . . . .	208
3.	Verschärfung der Sätze von MONTEL und VITALI . . . . .	208
§ 4.	Großer Satz von PICARD . . . . .	209
1.	Beweis des großen PICARDSchen Satzes . . . . .	210
2.	Historisches zu den Sätzen dieses Kapitels . . . . .	210
	Literatur . . . . .	210
	<i>Kapitel 11. Randverhalten von Potenzreihen . . . . .</i>	<i>212</i>
§ 1.	Konvergenz auf dem Rand . . . . .	212
1.	Sätze von FATOU, M. RIESZ und OSTROWSKI . . . . .	213
2.	Ein Lemma von M. RIESZ . . . . .	214
3.	Beweis der Sätze aus 1 . . . . .	215
4.	Ein Kriterium für Nichtfortsetzbarkeit . . . . .	216
	Literatur . . . . .	217
§ 2.	Theorie der Überkonvergenz. Lückensatz . . . . .	217
1.	Überkonvergente Potenzreihen . . . . .	218
2.	Überkonvergenzsatz von OSTROWSKI . . . . .	219
3.	Lückensatz von HADAMARD . . . . .	220
4.	PORTERS Konstruktion überkonvergenter Reihen . . . . .	221
5.	Historisches zum Lückensatz . . . . .	221
6.	Historisches zur Überkonvergenz . . . . .	222
7.	Ausblicke . . . . .	223
	Literatur . . . . .	223
§ 3.	Ein Satz von FATOU-HURWITZ-PÓLYA . . . . .	224
1.	Der HURWITZsche Beweis . . . . .	225
2.	Ausblicke . . . . .	226
	Literatur . . . . .	226
§ 4.	Ein Fortsetzungssatz von SZEGÖ . . . . .	227
1.	Vorbereitungen zum Beweis von (Sz) . . . . .	227
2.	Ein Hilfssatz . . . . .	229
3.	Beweis von (Sz) . . . . .	229
4.	Eine Anwendung . . . . .	230
5.	Ausblicke . . . . .	231
	Literatur . . . . .	232
	<i>Kapitel 12. Runge-Theorie für Kompakta . . . . .</i>	<i>233</i>
§ 1.	Hilfsmittel . . . . .	234
1.	CAUCHYSche Integralformel für Kompakta . . . . .	234
2.	Approximation durch rationale Funktionen . . . . .	236
3.	Polstellenverschiebungssatz . . . . .	237
§ 2.	RUNGE-Theorie für Kompakta . . . . .	239
1.	Approximationssätze von RUNGE . . . . .	239
2.	Folgerungen aus dem kleinen Satz von RUNGE . . . . .	240
3.	Hauptsatz der RUNGE-Theorie für Kompakta . . . . .	241

§3. Anwendungen des kleinen Satzes von RUNGE . . . . .	243
1. Punktweise konvergente Polynomfolgen, die nicht überall kompakt konvergieren . . . . .	243
2. Holomorphe Einbettung des Einheitskreises in den $\mathbb{C}^3$ . . . . .	246
§4. Diskussion der CAUCHYSchen Integralformel für Kompakta . . . . .	248
1. Finale Form von Satz 1.1 . . . . .	248
2. Umlaufungssatz . . . . .	250
Literatur . . . . .	251
 <i>Kapitel 13. Runge-Theorie für Bereiche</i> . . . . .	253
§1. Die RUNGESchen Sätze für Bereiche . . . . .	254
1. Auffüllung von Kompakta. RUNGES Beweis des Satzes von MITTAG-LEFFLER . . . . .	254
2. Approximationssätze von RUNGE . . . . .	255
3. Hauptsatz der CAUCHYSchen Funktionentheorie . . . . .	256
4. Zur Theorie der Löcher . . . . .	257
5. Historisches zur RUNGE-Theorie . . . . .	258
§2. RUNGESche Paare . . . . .	258
1. Topologische Charakterisierung RUNGEScher Paare . . . . .	259
2. RUNGESche Hülle . . . . .	260
3. Homologische Charakterisierung RUNGEScher Paare. Satz von BEHNKE-STEIN. . . . .	260
4. RUNGESche Bereiche . . . . .	261
5*. Approximation und holomorphe Fortsetzbarkeit . . . . .	262
§3. Holomorph-konvexe Hüllen und RUNGESche Paare . . . . .	263
1. Eigenschaften des Hüllenoperators . . . . .	263
2. Charakterisierung RUNGEScher Paare mittels holomorph-konvexer Hüllen . . . . .	265
Anhang: Über Komponenten lokal kompakter Räume. Satz von ŠURA-BURA . . . . .	266
1. Komponenten . . . . .	266
2. Existenz offener Kompakta . . . . .	267
3. Auffüllungen . . . . .	268
4. Beweis des Satzes von ŠURA-BURA . . . . .	268
Literatur . . . . .	269
 <i>Kapitel 14. Invarianz der Löcherzahl</i> . . . . .	271
§1. Homologietheorie. Trennungslemma . . . . .	271
1. Homologiegruppen. BETTI-Zahl . . . . .	271
2. Induzierte Homomorphismen. Natürliche Eigenschaften . . . . .	272
3. Trennung von Löchern durch geschlossene Wege . . . . .	274



§2. Invarianz der Löcherzahl. Produktsatz für Einheiten . . . . .	274
1. Zur Struktur der Homologiegruppe . . . . .	275
2. Löcherzahl und BETTI-Zahl . . . . .	276
3. Normalformen mehrfach zusammenhängender Gebiete (Bericht)	277
4. Zur Struktur der multiplikativen Gruppe $\mathcal{O}(G)^{\times}$ . . . . .	277
5. Ausblicke . . . . .	279
Literatur . . . . .	279
<i>Kurzbiographien</i> . . . . .	281
<i>Porträts berühmter Mathematiker</i> . . . . .	286
<i>Symbolverzeichnis</i> . . . . .	287
<i>Namenverzeichnis</i> . . . . .	288
<i>Sachverzeichnis</i> . . . . .	291