

# Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen .....	vi
Symbole in den Zeichnungen .....	vii
Vokabular .....	viii
Einleitung .....	1
Einführung der Fernelemente .....	2
Dreiecksverwandlung .....	5
Die Grundgebilde in Ebene und Raum .....	7
Grundgebilde mit uneigentlichem Träger .....	9
Die Axiome der projektiven Geometrie .....	12
Inzidenzaxiome .....	13
Reichhaltigkeitsaxiome .....	14
Dualitätsprinzip .....	15
Anordnungs- oder Trennungsaxiome .....	16
Stetigkeitsaxiom .....	17
Das Halbkugelmodell der projektiven Ebene .....	18
Die Trennungsrelation .....	19
Gliederung der Ebene .....	23
Gliederung der Punkte der Ebene durch n Geraden .....	23
EULER'SCHE Formel .....	27
Gliederung der Geraden der Ebene durch n Punkte .....	28
Gliederung der Punkte im Raum durch Ebenen .....	30
Gliederung der Ebenen durch Punkte .....	31
Gliederung der Geraden durch Geraden .....	31
Sätze über Punktgebiete und Geradenbereiche .....	32
Dreiecks- und Vierecks- Lage von vier Punkten .....	36
Der Satz von DESARGUES .....	38
MOULTON-Ebene .....	41
Gerade durch einen unzugänglichen Punkt .....	42
vollständiges Viereck / Vierseit und harmonische Lage .....	43
Harmonische Lage .....	45
Die harmonische 13er-Konfiguration .....	47
Konstruktion einer Geraden durch einen unzugänglichen Punkt .....	50
Sonderfälle der harmonischen Lage .....	50
Harmonische Lage und Doppelverhältnis .....	52
Harmonische Lage und Goldener Schnitt .....	53
Räumliche Konfigurationen .....	54
Das vollständige Hexaeder .....	54
Das vollständige Oktaeder .....	56
Die REYE-Konfiguration .....	57
Projektive Abbildungen .....	59
Perspektive Abbildungen .....	59
Projektive Abbildungen .....	62
Fundamentalsatz (Hauptsatz) der projektiven Geometrie .....	63
Kennzeichnung von Perspektivitäten .....	64

Kreuzpunkt- und Kreuzliniensatz.....	65
Satz von PAPPOS .....	66
Projektive Abbildungen auf sich .....	67
Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie .....	70
MÖBIUS'sches Netz .....	70
Rationale Punkte.....	71
Das Doppelverhältnis .....	76
Teilverhältnis .....	76
Doppelverhältnis.....	77
Projektive Erzeugung der Kegelschnitte .....	81
Projektive Erzeugung von Kreisen .....	87
Sätze von PASCAL und BRIANCHON.....	89
Pol und Polare .....	96
Hauptsatz der Polarentheorie.....	99
Pol, Polare und harmonische Lage .....	100
Punktreihen und Geradenbüschel 2. Ordnung stimmen überein .....	104
Pol und Polare – analytisch .....	105
Involutionen .....	109
Rechtwinkel-Axiom .....	112
2. Satz von DESARGUES .....	114
Involutionssatz vom vollständigen Viereck, Vierseit.....	115
Involutionen auf einem Kegelschnitt.....	116
STEINER'sche Fixpunkt konstruktion .....	118
Projektive Skalen.....	119
Additive oder arithmetische Skala.....	119
Multiplikative oder geometrische Skala .....	120
Periodische Skala.....	121
Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte .....	122
Mittelpunkte und Durchmesser .....	122
Konjugierte Punkte und Geraden .....	123
Achsen, Brennpunkte und Leitgeraden .....	126
Gleichungen der Mittelpunktkegelschnitte.....	130
Gleichung der Parabel .....	131
Büschel von Kegelschnitten .....	132
Büschel mit vier verschiedenen Trägerpunkten .....	132
Verschiedene Typen von Kegelschnittsbüscheln .....	137
Analytisches .....	138
Büschel mit zusammenfallenden Trägerpunkten .....	142
Kreisbüschel .....	144
Durch vier Tangenten bestimmte Büschel.....	145
Konstruktionsaufgaben für Kegelschnitte.....	146
Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit einer Geraden .....	146
Krümmungskreise.....	147
Scheitelkrümmungskreise.....	149
Krümmungskreise von Kegelschnitten – aus der Büscheltheorie .....	150
Parabel aus zwei Linienelementen .....	153

Projektive Erzeugung der Flächen 2. Ordnung im Raum .....	155
Kegel 2. Ordnung .....	155
Regelflächen 2. Ordnung .....	156
Flächen 2. Ordnung, die keine Geraden enthalten, Quadriken .....	158
Pol, Polare, Polarebene .....	160
Kurven 3. Ordnung .....	162
Die räumliche $C^3$ .....	162
Ebene Kurven 3. Ordnung .....	164
Die ebene $c^3$ als Schnitt eines Kegelschnitts- und eines Geradenbüschels .....	165
Rationale Kubiken $c_0^3$ .....	169
Klassische Konstruktionen von Kurven 3. Ordnung .....	173
Die topologische Struktur der projektiven Ebene .....	174
MÖBIUS'sches Band, einseitige Fläche .....	175
Das Heptaeder .....	177
Übergang zur affinen und EUKLIDischen und zur nichteuklidischen Geometrie .....	181
Affine Geometrie .....	181
Ähnlichkeitsgeometrie oder EUKLIDische Geometrie .....	182
Polareuklidische Geometrie .....	183
Hyperbolische Geometrie .....	183
Elliptische Geometrie .....	188
Pseudoeuklidische Geometrie .....	188
Noch einmal: EUKLIDische Geometrie .....	189
Zentralkollineationen anschaulich .....	191
Die Perspektive .....	191
Die Zentralprojektion .....	193
Konstruktion perspektivischer Bilder von räumlichen Objekten .....	195
Die Zentralkollineation als Hilfsmittel zu Konstruktion perspektiver Bilder .....	197
Zentralkollineationen – axiomatische Einführung .....	198
Eigenschaften der Zentralkollineationen .....	203
Grundkonstruktionen .....	203
Die Abbildungsgleichungen der Zentralkollineation .....	205
Involutorische Zentralkollineationen .....	207
Kegelschnitte, die als Ganzes festbleiben .....	208
Anwendung von involutorischen Zentralkollineationen für Kegelschnittssätze .....	209
Sonderfälle der Zentralkollineation .....	211
Schrägspiegelung, Achsenspiegelung .....	211
Punktspiegelung .....	212
Scherung, Parallelverschiebung .....	212
Achsenaffinitäten .....	213
Zentrische Streckung .....	213
Homogene Koordinaten .....	214
Homogene Koordinaten im 3-dimensionalen Raum .....	216
Zentralkollineationen in homogenen Koordinaten .....	218
Matrizen und Determinanten .....	220
Multiplikation von Matrizen .....	222
Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit .....	222
Determinanten .....	223
Berechnung der Inversen .....	225

Projektive Geometrie in Matrizen-Darstellung .....	228
Grundaufgaben in der Ebene .....	229
Grundaufgaben im Raum .....	230
Darstellung von Zentralkollineationen durch Matrizen .....	234
Darstellung von allgemeinen projektiven Abbildungen durch Matrizen .....	235
Berechnung von Fixpunkten und Fixgeraden .....	236
Affine Abbildungen und homogene Koordinaten .....	239
Kegelschnitte und Matrizen .....	244
Zusammenhang mit den Korrelationen, insbesondere den Polaritäten .....	245
Tangenten- und Polarengleichungen .....	246
Zerfallende Kegelschnitte .....	248
Beispiele .....	249
Allgemeine Eigenschaften .....	252
Senkrecht-Stehen und Rechtwinkel-Involution .....	253
Allgemeine projektive Transformationen .....	254
Der Fall $n = 1$ .....	255
Der Fall $n = 2$ .....	257
Beispiele für räumliche Kollineationen .....	261
Berechnung von Fixgeraden im Raum .....	266
Freie Geometrie ebener Kurven .....	268
Einfache Bewegung, elementare Bewegung .....	270
Einfacher Bogen .....	272
Elementarer Bogen, Elementarkurve .....	273
Lokale Singularitäten .....	273
Reguläre und lokal singuläre Elemente mit Fernelementen als Träger .....	275
Vergleich mit der analytischen Behandlung .....	277
Die Struktur des einfachen Bogens .....	281
Globale Singularitäten .....	288
C-Bogen und die Ei-Linie .....	288
Weitere Eigenschaften der Singularitäten .....	290
Elementarkurven .....	294
Form und Gegenform .....	295
Sätze über Elementarkurven .....	302
Elementarkurven 3. Ordnung und 3. Klasse .....	303
Weiteres, wovon hier nicht mehr gesprochen werden kann .....	307
Anwendungen .....	310
Historische Bemerkungen .....	311
Die projektive Geometrie als Unterrichtsgebiet an der Waldorfschule .....	316
Aufgaben .....	320
Schluss .....	332
Literaturverzeichnis .....	333
Register .....	335