

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorrechnung in zwei und drei Dimensionen	1
1.1	Vektoren in der Ebene	1
1.1.1	Kartesische Koordinaten und Zahlenmengen	1
1.1.2	Winkelfunktionen und Polarkoordinaten	3
1.1.3	Vektoren im \mathbb{R}^2	8
1.1.4	Physikalische und technische Anwendungen	13
1.1.5	Inneres Produkt (Skalarprodukt)	22
1.1.6	Parameterform und Hessesche Normalform einer Geraden	26
1.1.7	Geometrische Anwendungen	32
1.2	Vektoren im dreidimensionalen Raum	41
1.2.1	Der Raum \mathbb{R}^3	41
1.2.2	Inneres Produkt (Skalarprodukt)	46
1.2.3	Dreireihige Determinanten	49
1.2.4	Äußeres Produkt (Vektorprodukt)	50
1.2.5	Physikalische, technische und geometrische Anwendungen	55
1.2.6	Spatprodukt, mehrfache Produkte	63
1.2.7	Lineare Unabhängigkeit	67
1.2.8	Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^3	70
2	Vektorräume beliebiger Dimensionen	75
2.1	Die Vektorräume \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n	75
2.1.1	Der Raum \mathbb{R}^n und seine Arithmetik	75
2.1.2	Inneres Produkt, Beträge von Vektoren	76
2.1.3	Unterräume, lineare Mannigfaltigkeiten	78
2.1.4	Geometrie im \mathbb{R}^n , Winkel, Orthogonalität	82
2.1.5	Der Raum \mathbb{C}^n	85
2.2	Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus	86
2.2.1	Lösung quadratischer Gleichungssysteme	87
2.2.2	Matlab-Programme zur Lösung quadratischer Gleichungssysteme	90
2.2.3	Singuläre lineare Gleichungssysteme	96
2.2.4	Allgemeiner Satz über die Lösbarkeit linearer quadratischer Gleichungssysteme	101
2.2.5	Rechteckige Systeme, Rangkriterium	104
2.3	Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper	106
2.3.1	Einführung: Beispiel einer Gruppe	106
2.3.2	Gruppen	109
2.3.3	Endliche Permutationsgruppen	114
2.3.4	Homomorphismen, Nebenklassen	116
2.3.5	Körper	119

2.4	Vektorräume über beliebigen Körpern	121
2.4.1	Definition und Grundeigenschaften	121
2.4.2	Beispiele für Vektorräume	123
2.4.3	Unterräume, Basis, Dimension	125
2.4.4	Direkte Summen, freie Summen	130
2.4.5	Lineare Abbildungen: Definition und Beispiele	133
2.4.6	Isomorphismen, Konstruktion linearer Abbildungen	136
2.4.7	Kern, Bild, Rang	139
2.4.8	Euklidische Vektorräume, Orthogonalität	141
2.4.9	Ausblick auf die Funktionalanalysis	143
3	Matrizen	147
3.1	Definition, Addition, s -Multiplikation	147
3.1.1	Motivation	147
3.1.2	Grundlegende Begriffsbildung	147
3.1.3	Addition, Subtraktion und s -Multiplikation	149
3.1.4	Transposition, Spalten- und Zeilenmatrizen	152
3.2	Matrizenmultiplikation	154
3.2.1	Matrix-Produkt	154
3.2.2	Produkte mit Vektoren	157
3.2.3	Matrizen und lineare Abbildungen	158
3.2.4	Blockzerlegung	162
3.3	Reguläre und inverse Matrizen	164
3.3.1	Reguläre Matrizen	164
3.3.2	Inverse Matrizen	166
3.4	Determinanten	168
3.4.1	Definition, Transpositionsregel	169
3.4.2	Regeln für Determinanten	171
3.4.3	Berechnung von Determinanten mit dem Gaußschen Algorithmus	174
3.4.4	Matrix-Rang und Determinanten	178
3.4.5	Der Determinanten-Multiplikationssatz	180
3.4.6	Lineare Gleichungssysteme: die Cramersche Regel	181
3.4.7	Inversenformel	183
3.4.8	Entwicklungssatz	186
3.4.9	Zusammenstellung der wichtigsten Regeln über Determinanten	189
3.5	Spezielle Matrizen	191
3.5.1	Definition der wichtigsten speziellen Matrizen	191
3.5.2	Algebraische Strukturen von Mengen spezieller Matrizen	195
3.5.3	Orthogonale und unitäre Matrizen	197
3.5.4	Symmetrische Matrizen und quadratische Formen	200
3.5.5	Zerlegungen und Transformationen symmetrischer Matrizen	201
3.5.6	Positiv definite Matrizen und Bilinearformen	204
3.5.7	Kriterien für positiv definite Matrizen	206
3.5.8	Direkte Summe und direktes Produkt von Matrizen	209
3.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	211

3.6.1	Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren	211
3.6.2	Anwendung: Schwingungen	214
3.6.3	Eigenschaften des charakteristischen Polynoms	217
3.6.4	Eigenvektoren und Eigenräume	223
3.6.5	Symmetrische Matrizen und ihre Eigenwerte	228
3.7	Die Jordansche Normalform	235
3.7.1	Praktische Durchführung der Transformation auf Jordansche Normalform . . .	240
3.7.2	Berechnung des charakteristischen Polynoms und der Eigenwerte einer Matrix mit dem Krylov-Verfahren	249
3.7.3	Das Jacobi-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen	251
3.7.4	Von-Mises-Iteration, Deflation und inverse Iteration zur numerischen Eigen- wert- und Eigenvektorberechnung	254
3.8	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	260
3.8.1	Rangkriterium	260
3.8.2	Quadratische Systeme, Fredholmsche Alternative	262
3.8.3	Dreieckszerlegung von Matrizen durch den Gaußschen Algorithmus, Cholesky- Verfahren	264
3.8.4	Lösung großer Gleichungssysteme	269
3.8.5	Einzelschrittverfahren	277
3.9	Matrix-Funktionen	286
3.9.1	Matrix-Potenzen	286
3.9.2	Matrixpolynome	287
3.9.3	Annullierende Polynome, Satz von Cayley-Hamilton	289
3.9.4	Das Minimalpolynom einer Matrix	294
3.9.5	Folgen und Reihen von Matrizen	297
3.9.6	Potenzreihen von Matrizen	299
3.9.7	Matrix-Exponentialfunktion, Matrix-Sinus- und Matrix-Cosinus-Funktion . . .	303
3.10	Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen	307
3.10.1	Drehungen und Spiegelungen in der Ebene	308
3.10.2	Spiegelung im \mathbb{R}^n , QR -Zerlegung	310
3.10.3	Drehungen im dreidimensionalen Raum	313
3.10.4	Spiegelungen und Drehspiegelungen im dreidimensionalen Raum	320
3.10.5	Basiswechsel und Koordinatentransformation	321
3.10.6	Transformation bei kartesischen Koordinaten	324
3.10.7	Affine Abbildungen und affine Koordinatentransformationen	326
3.10.8	Hauptachsentransformation von Quadriken	328
3.10.9	Kegelschnitte	333
3.10.10	Flächen zweiten Grades: Ellipsoide, Hyperboloide, Paraboloid	336
3.11	Lineare Ausgleichsprobleme	340
3.11.1	Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate	340
3.11.2	Lösung der Normalgleichung	349
3.11.3	Lösung des Minimierungsproblems	350

4 Anwendungen	363
4.1 Technische Strukturen	363
4.1.1 Ebene Stabwerke	363
4.1.2 Elektrische Netzwerke	370
4.2 Roboter-Bewegung	380
4.2.1 Einführende Betrachtungen	380
4.2.2 Kinematik eines $(n + 1)$ -gliedrigen Roboters	381
 Anhang	 391
A Lösungen zu den Übungen	393
 Symbole	 401
 Literaturverzeichnis	 403
 Stichwortverzeichnis	 409