

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Vektorrechnung in zwei und drei Dimensionen</b>	<b>1</b>
1.1 Vektoren in der Ebene . . . . .	1
1.1.1 Kartesische Koordinaten und Zahlenmengen . . . . .	1
1.1.2 Winkelfunktionen und Polarkoordinaten . . . . .	3
1.1.3 Vektoren im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	8
1.1.4 Physikalische und technische Anwendungen . . . . .	13
1.1.5 Inneres Produkt (Skalarprodukt) . . . . .	22
1.1.6 Parameterform und Hessesche Normalform einer Geraden . . . . .	26
1.1.7 Geometrische Anwendungen . . . . .	32
1.2 Vektoren im dreidimensionalen Raum . . . . .	41
1.2.1 Der Raum $\mathbb{R}^3$ . . . . .	41
1.2.2 Inneres Produkt (Skalarprodukt) . . . . .	46
1.2.3 Dreireihige Determinanten . . . . .	49
1.2.4 Äußeres Produkt (Vektorprodukt) . . . . .	50
1.2.5 Physikalische, technische und geometrische Anwendungen . . . . .	55
1.2.6 Spatprodukt, mehrfache Produkte . . . . .	63
1.2.7 Lineare Unabhängigkeit . . . . .	67
1.2.8 Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	70
<b>2 Vektorräume beliebiger Dimensionen</b>	<b>75</b>
2.1 Die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ . . . . .	75
2.1.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$ und seine Arithmetik . . . . .	75
2.1.2 Inneres Produkt, Beträge von Vektoren . . . . .	76
2.1.3 Unterräume, lineare Mannigfaltigkeiten . . . . .	78
2.1.4 Geometrie im $\mathbb{R}^n$ , Winkel, Orthogonalität . . . . .	82
2.1.5 Der Raum $\mathbb{C}^n$ . . . . .	85
2.2 Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus . . . . .	86
2.2.1 Lösung quadratischer Gleichungssysteme . . . . .	87
2.2.2 Matlab-Programme zur Lösung quadratischer Gleichungssysteme . . . . .	90
2.2.3 Singuläre lineare Gleichungssysteme . . . . .	96
2.2.4 Allgemeiner Satz über die Lösbarkeit linearer quadratischer Gleichungssysteme	101
2.2.5 Rechteckige Systeme, Rangkriterium . . . . .	104
2.3 Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper . . . . .	106
2.3.1 Einführung: Beispiel einer Gruppe . . . . .	106
2.3.2 Gruppen . . . . .	109
2.3.3 Endliche Permutationsgruppen . . . . .	114
2.3.4 Homomorphismen, Nebenklassen . . . . .	116
2.3.5 Körper . . . . .	119

<b>2.4 Vektorräume über beliebigen Körpern</b>	<b>121</b>
2.4.1 Definition und Grundeigenschaften	121
2.4.2 Beispiele für Vektorräume	123
2.4.3 Unterräume, Basis, Dimension	125
2.4.4 Direkte Summen, freie Summen	130
2.4.5 Lineare Abbildungen: Definition und Beispiele	133
2.4.6 Isomorphismen, Konstruktion linearer Abbildungen	136
2.4.7 Kern, Bild, Rang	139
2.4.8 Euklidische Vektorräume, Orthogonalität	141
2.4.9 Ausblick auf die Funktionalanalysis	143
<b>3 Matrizen</b>	<b>147</b>
3.1 Definition, Addition, $s$ -Multiplikation	147
3.1.1 Motivation	147
3.1.2 Grundlegende Begriffsbildung	147
3.1.3 Addition, Subtraktion und $s$ -Multiplikation	149
3.1.4 Transposition, Spalten- und Zeilenmatrizen	152
3.2 Matrizenmultiplikation	154
3.2.1 Matrix-Produkt	154
3.2.2 Produkte mit Vektoren	157
3.2.3 Matrizen und lineare Abbildungen	158
3.2.4 Blockzerlegung	162
3.3 Reguläre und inverse Matrizen	164
3.3.1 Reguläre Matrizen	164
3.3.2 Inverse Matrizen	166
3.4 Determinanten	168
3.4.1 Definition, Transpositionsregel	169
3.4.2 Regeln für Determinanten	171
3.4.3 Berechnung von Determinanten mit dem Gaußschen Algorithmus	174
3.4.4 Matrix-Rang und Determinanten	178
3.4.5 Der Determinanten-Multiplikationsatz	180
3.4.6 Lineare Gleichungssysteme: die Cramersche Regel	181
3.4.7 Inversenformel	183
3.4.8 Entwicklungssatz	186
3.4.9 Zusammenstellung der wichtigsten Regeln über Determinanten	189
3.5 Spezielle Matrizen	191
3.5.1 Definition der wichtigsten speziellen Matrizen	191
3.5.2 Algebraische Strukturen von Mengen spezieller Matrizen	195
3.5.3 Orthogonale und unitäre Matrizen	197
3.5.4 Symmetrische Matrizen und quadratische Formen	200
3.5.5 Zerlegungen und Transformationen symmetrischer Matrizen	201
3.5.6 Positiv definite Matrizen und Bilinearformen	204
3.5.7 Kriterien für positiv definite Matrizen	206
3.5.8 Direkte Summe und direktes Produkt von Matrizen	209
3.6 Eigenwerte und Eigenvektoren	211

3.6.1	Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren . . . . .	211
3.6.2	Anwendung: Schwingungen . . . . .	214
3.6.3	Eigenschaften des charakteristischen Polynoms . . . . .	217
3.6.4	Eigenvektoren und Eigenräume . . . . .	223
3.6.5	Symmetrische Matrizen und ihre Eigenwerte . . . . .	228
3.7	Die Jordansche Normalform . . . . .	235
3.7.1	Praktische Durchführung der Transformation auf Jordansche Normalform . . . . .	240
3.7.2	Berechnung des charakteristischen Polynoms und der Eigenwerte einer Matrix mit dem Krylov-Verfahren . . . . .	249
3.7.3	Das Jacobi-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen . . . . .	251
3.7.4	Von-Mises-Iteration, Deflation und inverse Iteration zur numerischen Eigenwert- und Eigenvektorberechnung . . . . .	254
3.8	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen . . . . .	260
3.8.1	Rangkriterium . . . . .	260
3.8.2	Quadratische Systeme, Fredholmsche Alternative . . . . .	262
3.8.3	Dreieckszerlegung von Matrizen durch den Gaußschen Algorithmus, Cholesky-Verfahren . . . . .	264
3.8.4	Lösung großer Gleichungssysteme . . . . .	269
3.8.5	Einzelschrittverfahren . . . . .	277
3.9	Matrix-Funktionen . . . . .	286
3.9.1	Matrix-Potenzen . . . . .	286
3.9.2	Matrixpolynome . . . . .	287
3.9.3	Annularende Polynome, Satz von Cayley-Hamilton . . . . .	289
3.9.4	Das Minimalpolynom einer Matrix . . . . .	294
3.9.5	Folgen und Reihen von Matrizen . . . . .	297
3.9.6	Potenzreihen von Matrizen . . . . .	299
3.9.7	Matrix-Exponentialfunktion, Matrix-Sinus- und Matrix-Cosinus-Funktion . . . . .	303
3.10	Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen . . . . .	307
3.10.1	Drehungen und Spiegelungen in der Ebene . . . . .	308
3.10.2	Spiegelung im $\mathbb{R}^n$ , $QR$ -Zerlegung . . . . .	310
3.10.3	Drehungen im dreidimensionalen Raum . . . . .	313
3.10.4	Spiegelungen und Drehspiegelungen im dreidimensionalen Raum . . . . .	320
3.10.5	Basiswechsel und Koordinatentransformation . . . . .	321
3.10.6	Transformation bei kartesischen Koordinaten . . . . .	324
3.10.7	Affine Abbildungen und affine Koordinatentransformationen . . . . .	326
3.10.8	Hauptachsentransformation von Quadriken . . . . .	328
3.10.9	Kegelschnitte . . . . .	333
3.10.10	Flächen zweiten Grades: Ellipsoide, Hyperboloide, Paraboloide . . . . .	336
3.11	Lineare Ausgleichsprobleme . . . . .	340
3.11.1	Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate . . . . .	340
3.11.2	Lösung der Normalgleichung . . . . .	349
3.11.3	Lösung des Minimierungsproblems . . . . .	350

<b>4 Anwendungen</b>	<b>363</b>
4.1 Technische Strukturen . . . . .	363
4.1.1 Ebene Stabwerke . . . . .	363
4.1.2 Elektrische Netzwerke . . . . .	370
4.2 Roboter-Bewegung . . . . .	380
4.2.1 Einführende Betrachtungen . . . . .	380
4.2.2 Kinematik eines $(n + 1)$ -gliedrigen Roboters . . . . .	381
<b>Anhang</b>	<b>391</b>
<b>A Lösungen zu den Übungen</b>	<b>393</b>
<b>Symbole</b>	<b>401</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>403</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>409</b>