

Inhaltsverzeichnis

E Einleitung	1
0 Strukturen	8
0.1 Skalarprodukt	9
0.3 Orthogonalität	11
0.4 Norm	13
0.6 Metrik	16
0.8 Beispiele von Metriken	16
0.9 Abstand und Kugeln	18
0.10 Offene und abgeschlossene Mengen	19
0.11 Topologie	19
0.14 Vergleich von Topologien	21
0.15 Vergleich von Normen	21
0.17 Konvergenz und Stetigkeit	23
0.18 Konvergenz in metrischen Räumen	24
0.21 Vollständigkeit	27
0.22 Banachräume und Hilberträume	28
0.23 Folgenräume	28
0.24 Vervollständigung	30
U0 Übungen	33
U0.6 Vollständigkeit des Euklidischen Raumes	36
U0.7 Nichtvollständiger Funktionenraum	36
U0.9 Hausdorff-Abstand von Mengen	37
1 Funktionenräume	38
1.1 Beschränkte Funktionen	39
1.2 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen	40
1.3 Stetige Funktionen	41
1.4 Träger einer Funktion	43
1.5 Differenzierbare Funktionen	43
1.7 Hölderstetige Funktionen	46
1.9 Maße	47
1.10 Beispiele von Maßen	48
1.11 Messbare Funktionen	49

VIII Inhaltsverzeichnis

1.15	Lebesgue-Räume	52
1.18	Hölder-Ungleichung	54
1.19	Majorantenkriterium in L^p	57
1.20	Minkowski-Ungleichung	57
1.21	Satz von Fischer-Riesz	57
1.23	Vitali'scher Konvergenzsatz	59
1.25	Allgemeiner Lebesgue'scher Konvergenzsatz	62
1.27	Sobolev-Räume	65
U1	Übungen	69
U1.3	Standard Testfunktion	69
U1.4	L^p -Norm für $p \rightarrow \infty$	70
U1.6	Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	71
A1	Lebesgue-Integral	74
A1.3	Elementares Lebesgue-Maß	75
A1.4	Äußeres Maß	76
A1.5	Treppenfunktionen	77
A1.6	Elementares Integral	78
A1.8	Lebesgue-integrierbare Funktionen	81
A1.10	Axiome des Lebesgue-Integrals	82
A1.14	Integrierbare Mengen	88
A1.15	Maßerweiterung	90
A1.18	Satz von Egorov	94
A1.19	Majorantenkriterium	94
A1.20	Lemma von Fatou	96
A1.21	Konvergenzsatz von Lebesgue	97
2	Teilmengen von Funktionenräumen	98
2.1	Konvexe Mengen	99
2.3	Projektionssatz	100
2.5	Fast orthogonales Element	103
2.6	Kompaktheit	104
2.12	Satz von Arzelà-Ascoli (Kompaktheit in C^0)	110
2.13	Faltung	112
2.14	Dirac-Folge	114
2.16	Satz von Riesz (Kompaktheit in L^p)	117
2.18	Beispiele separabler Räume	120
2.19	Abschneidefunktion	122
2.20	Partition der Eins	123
2.22	Fundamentallemma der Variationsrechnung	126
2.23	Lokale Approximation von Sobolev-Funktionen	127
2.25	Produktregel für Sobolev-Funktionen	129
2.26	Kettenregel für Sobolev-Funktionen	130
U2	Übungen	132
U2.4	Strikt konvexe Räume	133
U2.5	Trennungssatz im \mathbb{R}^n	134

U2.6	Konvexe Funktionen	135
U2.7	Charakterisierung konvexer Funktionen	136
U2.8	Stützebenen	138
U2.9	Jensen'sche Ungleichung	139
U2.11	Raum L^p für $p < 1$	140
U2.13	Kompakte Mengen in ℓ^2	141
U2.15	Vergleich der Hölderräume	142
U2.16	Kompaktheit bzgl. Hausdorff-Metrik	143
U2.18	Stetige Fortsetzung	144
U2.19	Satz von Dini	144
U2.20	Nichtapproximierbarkeit in $C^{0,\alpha}$	145
U2.21	Kompakte Mengen in L^p	145
3	Lineare Operatoren	146
3.2	Lineare Operatoren	148
3.7	Neumann-Reihe	153
3.8	Satz über invertierbare Operatoren	153
3.9	Analytische Funktionen von Operatoren	154
3.10	Beispiele (Exponentialfunktion)	154
3.12	Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren	156
3.14	Lineare Differentialoperatoren	157
3.17	Distributionen (Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$)	159
3.20	Topologie auf $C_0^\infty(\Omega)$	162
3.21	Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$	164
U3	Übungen	167
U3.3	Eindeutige Fortsetzung linearer Abbildungen	168
U3.4	Limes linearer Abbildungen	168
4	Lineare Funktionale	170
4.1	Riesz'scher Darstellungssatz	171
4.2	Satz von Lax-Milgram	172
4.4	Elliptische Randwertprobleme	175
4.5	Schwache Randwertprobleme	177
4.6	Existenzsatz für Neumann-Problem	178
4.7	Poincaré-Ungleichung	179
4.8	Existenzsatz für Dirichlet-Problem	179
4.10	Variationsmaß	180
4.11	Satz von Radon-Nikodym	181
4.12	Dualraum von L^p für $p < \infty$	183
4.14	Satz von Hahn-Banach	188
4.15	Satz von Hahn-Banach für lineare Funktionale	190
4.20	Räume additiver Maße	193
4.21	Räume regulärer Maße	193
4.23	Satz von Riesz-Radon	195
4.25	Funktionen beschränkter Variation	199

U4	Übungen	202
U4.1	Duale Norm auf \mathbb{R}^n	202
U4.2	Dualraum des Kreuzprodukts	202
U4.3	Integralgleichung	202
U4.5	Dualraum von $C^m(I)$	204
U4.6	Dualraum von c_0 und c	206
U4.8	Positive Funktionale auf C_0^0	208
U4.9	Funktionen mit beschränkter Variation	209
A4	Aussagen aus der Maßtheorie	214
A4.1	Jordan-Zerlegung	214
A4.2	Hahn-Zerlegung	215
A4.5	Lemma von Alexandrov	219
A4.7	Satz von Luzin	221
A4.8	Produktmaß	222
A4.10	Satz von Fubini	224
5	Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	228
5.1	Baire'scher Kategoriensatz	229
5.2	Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	229
5.3	Satz von Banach-Steinhaus	230
5.7	Satz von der offenen Abbildung	232
5.8	Satz von der inversen Abbildung	233
5.9	Satz vom abgeschlossenen Graphen	233
U5	Übungen	235
U5.2	Punktweise Konvergenz in $\mathcal{L}(X; Y)$	235
U5.4	Sesquilinearformen	236
6	Schwache Konvergenz	236
6.1	Schwache Konvergenz	237
6.2	Einbettung in den Bidualraum	238
6.7	Schwache Topologie	243
6.8	Reflexivität	245
6.12	Trennungssatz	250
6.14	Lemma von Mazur	252
6.16	Allgemeine Poincaré-Ungleichung	253
6.17	Elliptisches Minimumproblem	255
U6	Übungen	261
U6.4	Schwache Konvergenz in C^0	262
U6.7	Schwache Konvergenz oszillierender Funktionen	265
U6.8	Variationsungleichung	266
A6	Eigenschaften von Sobolev-Funktionen	270
A6.1	Rellich'scher Einbettungssatz in $W_0^{m,p}(\Omega)$	270
A6.2	Lipschitz-Rand	272
A6.3	Lokalisierung	273
A6.4	Rellich'scher Einbettungssatz in $W^{m,p}(\Omega)$	274

A6.5	Randintegral	275
A6.6	Spursatz	279
A6.8	Schwacher Gauß'scher Satz	282
A6.12	Fortsetzungssatz für Sobolev-Funktionen	286
A6.13	Einbettungssatz auf den Rand	287
A6.14	Schwache Folgenkompaktheit in $L^1(\mu)$	288
A6.15	Satz von Vitali-Hahn-Saks	294
7	Endlich-dimensionale Approximation	296
7.3	Schauder-Basis	300
7.4	Duale Basis	301
7.6	Bessel'sche Ungleichung	304
7.7	Orthonormalbasis	305
7.10	Weierstraß'scher Approximationssatz	308
7.13	Lineare Projektionen	311
7.14	Stetige Projektionen	313
7.15	Satz vom abgeschlossenen Komplement	313
7.21	Stückweise konstante Approximation	317
7.22	Stetige stückweise lineare Approximation	321
7.23	Ritz-Galerkin-Approximation	324
7.25	Céa-Lemma	325
U7	Übungen	326
U7.1	Hamelbasis	326
U7.2	Unstetige lineare Abbildungen	326
U7.8	Projektoren in $L^2(]-\pi, \pi[)$	328
8	Kompakte Operatoren	330
8.1	Kompakte Operatoren	331
8.6	Einbettungssatz in Hölder-Räumen	338
8.7	Sobolev-Zahl	339
8.8	Satz von Sobolev	342
8.9	Einbettungssatz in Sobolev-Räumen	345
8.11	Satz von Morrey	348
8.13	Einbettungssatz von Sobolev-Räumen in Hölder-Räume	350
8.14	Inverser Laplace-Operator	352
8.15	Hilbert-Schmidt-Integraloperator	353
8.16	Schur-Integraloperatoren	355
8.17	Fundamentallösung des Laplace-Operators	359
8.18	Singuläre Integraloperatoren	360
8.19	Hölder-Korn-Lichtenstein-Ungleichung	362
8.20	Calderon-Zygmund-Ungleichung	364
U8	Übungen	365
U8.2	Ehrling-Lemma	365
U8.8	Sobolev-Räume auf \mathbb{R}^n	368
U8.9	Einbettungssatz im \mathbb{R}^n	369

XII Inhaltsverzeichnis

U8.10	Poincaré-Ungleichungen	370
U8.13	Nukleare Operatoren	371
U8.15	Dimensionsabschätzung für Eigenräume	372
A8	Calderon-Zygmund-Ungleichung	374
9	Spektrum kompakter Operatoren	386
9.6	Fredholm-Operatoren	391
9.9	Spektralsatz für kompakte Operatoren	395
9.11	Fredholm-Alternative	399
9.12	Endlich-dimensionaler Fall	400
9.13	Jordan-Normalform	400
9.14	Reeller Fall	401
10	Selbstadjungierte Operatoren	402
10.1	Adjungierter Operator	403
10.2	Hilbertraum-Adjungierte	403
10.4	Annihilator	404
10.6	Satz von Schauder	405
10.8	Satz von Fredholm	407
10.9	Normale Operatoren	407
10.12	Spektralsatz für kompakte normale Operatoren	409
10.14	Eigenwertproblem als Variationsproblem	412
10.15	Selbstadjungierter Integraloperator	413
10.16	Eigenwertproblem für den Laplace-Operator	414
U10	Übungen	422
U10.1	Adjungierte Abbildung auf C^0	422
A10	Elliptische Regularitätstheorie	427
A10.2	Satz von Friedrichs	428
Literaturverzeichnis		433
Symbolverzeichnis		435
Sachverzeichnis		439