

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung — 1</b>
1.1	Überblick — 1
1.2	Methodische Schwerpunkte — 2
1.3	Notation — 3
1.4	Formalismus und Sicherheit — 4
1.5	Minimalismus — 6
1.6	Danksagungen — 7
<b>2</b>	<b>Mengen — 8</b>
2.1	Mengen und Elemente — 8
2.1.1	Mengen, Elemente, Objekte — 8
2.1.2	Mengendefinition – Möglichkeiten und Fallstricke — 9
2.2	Mengenrelationen und -operationen — 14
2.3	Das Auswahlaxiom* — 19
2.4	Axiomatische Mengenlehre — 20
2.4.1	Hauptrichtungen — 20
2.4.2	ZFU als Beispiel einer Axiomatik* — 22
2.4.3	Auseits der Axiomatik — 24
2.5	Übungsaufgaben — 25
<b>3</b>	<b>Relationen und Funktionen — 29</b>
3.1	Paare und Tupel — 29
3.2	Relationen — 31
3.3	Abbildungen (Funktionen) — 34
3.4	Äquivalenzrelationen — 37
3.5	Kongruenzrelationen — 40
3.6	Ordnungsrelationen — 42
3.6.1	Halb- und Totalordnungen — 42
3.6.2	Extremale und begrenzende Elemente — 44
3.6.3	Ordnungen und das Auswahlaxiom* — 45
3.6.4	Verbände als spezielle Ordnungen* — 46
3.7	Operationen auf Relationen — 48
3.8	Permutationen — 50
3.9	Abbildungen von Relationen* — 52
3.10	Induktion und Rekursion — 53
3.10.1	Induktive Mengendefinitionen — 53
3.10.2	Induktionshistorie — 57
3.10.3	Induktionsvarianten — 58
3.10.4	Induktionsbeweise — 60
3.10.5	Rekursive Funktionsdefinitionen — 61

3.11	Hüllen und Erzeugendensysteme — <b>68</b>
3.11.1	Transitive Hülle — <b>68</b>
3.11.2	Andere Hüllen — <b>70</b>
3.12	Übungsaufgaben — <b>71</b>
<b>4</b>	<b>Logik — 78</b>
4.1	Aussagenlogik — <b>79</b>
4.1.1	Die Syntax der Aussagenlogik — <b>79</b>
4.1.2	Zwei wichtige Eigenschaften der Syntax der Aussagenlogik* — <b>81</b>
4.1.3	Die elementare Semantik der Aussagenlogik — <b>84</b>
4.1.4	Semantische Begriffe rund ums Modell — <b>89</b>
4.1.5	Substitution und Ersetzung — <b>96</b>
4.1.6	Assoziativitätsaspekte — <b>100</b>
4.1.7	Mehr über Junktoren* — <b>102</b>
4.1.8	Reduzierbarkeit und Dualität* — <b>107</b>
4.1.9	Normalformen — <b>109</b>
4.1.10	Beweisverfahren und Algorithmen — <b>114</b>
4.2	Prädikatenlogik — <b>125</b>
4.2.1	Die Syntax der Prädikatenlogik — <b>126</b>
4.2.2	Weitere syntaktische Begriffe — <b>128</b>
4.2.3	Die elementare Semantik der Prädikatenlogik — <b>131</b>
4.2.4	Semantische Begriffe und Sätze der Prädikatenlogik — <b>133</b>
4.2.5	Substitution und Ersetzung in PL1 — <b>136</b>
4.2.6	Entscheidungsprobleme* — <b>139</b>
4.2.7	PL1-Beweisverfahren und -Algorithmen* — <b>141</b>
4.2.8	Prädikatenlogik mit Identität — <b>148</b>
4.3	Übungsaufgaben — <b>150</b>
<b>5</b>	<b>Zahlen und Anzahlen — 163</b>
5.1	Zahlen — <b>164</b>
5.1.1	Natürliche Zahlen und ihre Operationen — <b>164</b>
5.1.2	Ganze Zahlen — <b>169</b>
5.1.3	Rationale Zahlen — <b>172</b>
5.1.4	Reelle und komplexe Zahlen* — <b>175</b>
5.2	Anzahlen — <b>181</b>
5.2.1	Mächtigkeit und endliche Anzahlen — <b>181</b>
5.2.2	Abzählende Kombinatorik — <b>184</b>
5.2.3	Unendliche Anzahlen — <b>193</b>
5.3	Elementare Zahlentheorie* — <b>205</b>
5.3.1	Teiler und Restklassenarithmetik — <b>205</b>
5.3.2	Primzahlen, ggT und Restklassengleichungen — <b>207</b>
5.4	Übungsaufgaben — <b>217</b>

<b>6</b>	<b>Graphen — 226</b>
6.1	Einführende Beispiele — 227
6.2	Definition, Grundbegriffe — 230
6.3	Darstellungsfragen — 232
6.3.1	Zeichnerische Darstellung in der Ebene — 232
6.3.2	Andere Darstellungen von Graphen — 234
6.4	Isomorphie — 235
6.5	Nachbarschaft, Wege — 236
6.5.1	... in ungerichteten Graphen — 236
6.5.2	... in gerichteten Graphen — 237
6.5.3	... und in beiden — 238
6.5.4	Zwei Hilfssätze für die theoretische Informatik — 238
6.5.5	Weglängen — 241
6.5.6	Zusammenhang — 242
6.5.7	Spezielle Wege — 243
6.6	Bäume — 246
6.6.1	Bäume – ein Thema mit Variationen — 246
6.6.2	Gerichtete ungeordnete Bäume — 248
6.6.3	Ungerichtete ungeordnete Bäume — 249
6.6.4	Parallelen zwischen gerichteten und ungerichteten Bäumen — 251
6.6.5	Geordnete Bäume — 252
6.6.6	Spannbäume — 253
6.6.7	Baumbezogene Graphenalgorithmen — 254
6.6.8	Unendliche Bäume — 257
6.7	Beschriftete Graphen — 258
6.7.1	Endliche Automaten — 258
6.7.2	Termsyntax — 260
6.7.3	Färbungen — 260
6.8	Einfache Algorithmen für endliche Graphen — 261
6.8.1	Graphendurchläufe, Zusammenhang, Spannbäume — 261
6.8.2	Besondere Wege: kürzeste, längste, Euler'sche und Hamilton'sche — 264
6.9	Übungsaufgaben — 267
<b>7</b>	<b>Algebra — 273</b>
7.1	Gruppen — 273
7.1.1	Definition, Beispiele, Grundeigenschaften — 273
7.1.2	Gruppenhomomorphismen — 278
7.1.3	Untergruppen — 279
7.2	Ringe und Körper — 285
7.2.1	Ringe — 285
7.2.2	Körper — 290
7.3	Verbände* — 292

7.4	Vektorräume — 295
7.4.1	Definition und Beispiele — 296
7.4.2	Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension — 297
7.4.3	Untervektorräume — 303
7.4.4	Lineare Abbildungen und Matrizen — 305
7.4.5	Lineare Gleichungssysteme — 314
7.4.6	Räume linearer Abbildungen — 317
7.4.7	Basistransformationen — 324
7.4.8	Determinanten — 325
7.4.9	Eigenwerte und Eigenvektoren — 332
7.5	Quotienten* — 335
7.5.1	Normalteiler und Faktorgruppen — 336
7.5.2	Ideale und Restklassenringe — 339
7.5.3	Quotientenräume von Vektorräumen — 340
7.5.4	Isomorphiesätze bezüglich Produkten und Quotienten — 341
7.6	Allgemeine Algebra* — 341
7.6.1	Zwei Beispiele — 342
7.6.2	Signaturen, Terme und Spezifikationen — 343
7.6.3	Algebren und Modelle — 344
7.6.4	Initiale Semantik — 346
7.7	Übungsaufgaben — 349
<b>8</b>	<b>Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie — 364</b>
8.1	Markante Beispiele — 364
8.1.1	Die Verdoppelungsstrategie — 364
8.1.2	Das Aufteilungsproblem — 365
8.1.3	Das False-Positive-Problem — 366
8.1.4	Das Geburtstagsphänomen — 366
8.1.5	Das Ziegenproblem — 366
8.1.6	Serien beim Glücksspiel – der Spielerfehlschluss — 368
8.2	Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsmodelle — 368
8.2.1	Zufallsergebnisse — 368
8.2.2	Wahrscheinlichkeit und Ereignisse — 369
8.2.3	Wahrscheinlichkeitsräume — 371
8.2.4	Reiner Zufall — 375
8.3	Abgeleitete Begriffe — 376
8.3.1	Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit — 376
8.3.2	Mehrstufige Zufallsexperimente — 379
8.3.3	Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, Erwartungswerte — 384
8.3.4	Erwartungswerte als Entscheidungsgrundlage — 387
8.3.5	Streuungsmaße — 388
8.4	Anwendungsbeispiele — 393

8.4.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe und Ergebnisse an einem Demonstrationsbeispiel — 393
8.4.2	Ernütterung bei der Verdopplungsstrategie — 394
8.4.3	Gerechtigkeit beim Aufteilungsproblem — 396
8.4.4	Erleichterung beim False Positive — 397
8.5	Prozesse — 398
8.5.1	Definition und Beispiele — 398
8.5.2	Spezielle Bernoulli-Prozesse — 398
8.5.3	Die hypergeometrische Verteilung — 403
8.5.4	Markow-Ketten* — 405
8.5.5	Zufallsbewegungen* — 410
8.6	Übungsaufgaben — 412
	<b>Literatur — 421</b>
	<b>Stichwortverzeichnis — 425</b>