

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung — 1

- 1.1 Überblick — 1
- 1.2 Methodische Schwerpunkte — 2
- 1.3 Notation — 3
- 1.4 Formalismus und Sicherheit — 4
- 1.5 Minimalismus — 6
- 1.6 Danksagungen — 7

2 Mengen — 8

- 2.1 Mengen und Elemente — 8
 - 2.1.1 Mengen, Elemente, Objekte — 8
 - 2.1.2 Mengendefinition – Möglichkeiten und Fallstricke — 9
- 2.2 Mengenrelationen und -operationen — 14
- 2.3 Das Auswahlaxiom* — 19
- 2.4 Axiomatische Mengenlehre — 20
 - 2.4.1 Hauptrichtungen — 20
 - 2.4.2 ZFU als Beispiel einer Axiomatik* — 22
 - 2.4.3 Abseits der Axiomatik — 24
- 2.5 Übungsaufgaben — 25

3 Relationen und Funktionen — 29

- 3.1 Paare und Tupel — 29
- 3.2 Relationen — 31
- 3.3 Abbildungen (Funktionen) — 34
- 3.4 Äquivalenzrelationen — 37
- 3.5 Kongruenzrelationen — 40
- 3.6 Ordnungsrelationen — 42
 - 3.6.1 Halb- und Totalordnungen — 42
 - 3.6.2 Extremale und begrenzende Elemente — 44
 - 3.6.3 Ordnungen und das Auswahlaxiom* — 45
 - 3.6.4 Verbände als spezielle Ordnungen* — 46
- 3.7 Operationen auf Relationen — 48
- 3.8 Permutationen — 50
- 3.9 Abbildungen von Relationen* — 52
- 3.10 Induktion und Rekursion — 53
 - 3.10.1 Induktive Mengendefinitionen — 53
 - 3.10.2 Induktionshistorie — 57
 - 3.10.3 Induktionsvarianten — 58
 - 3.10.4 Induktionsbeweise — 60
 - 3.10.5 Rekursive Funktionsdefinitionen — 61

3.11 Hüllen und Erzeugendensysteme — **68**

3.11.1 Transitive Hülle — **68**

3.11.2 Andere Hüllen — **70**

3.12 Übungsaufgaben — **71**

4 Logik — 78

4.1 Aussagenlogik — **79**

4.1.1 Die Syntax der Aussagenlogik — **79**

4.1.2 Zwei wichtige Eigenschaften der Syntax der Aussagenlogik* — **81**

4.1.3 Die elementare Semantik der Aussagenlogik — **84**

4.1.4 Semantische Begriffe rund ums Modell — **89**

4.1.5 Substitution und Ersetzung — **96**

4.1.6 Assoziativitätsaspekte — **100**

4.1.7 Mehr über Junktoren* — **102**

4.1.8 Reduzierbarkeit und Dualität* — **107**

4.1.9 Normalformen — **109**

4.1.10 Beweisverfahren und Algorithmen — **114**

4.2 Prädikatenlogik — **125**

4.2.1 Die Syntax der Prädikatenlogik — **126**

4.2.2 Weitere syntaktische Begriffe — **128**

4.2.3 Die elementare Semantik der Prädikatenlogik — **131**

4.2.4 Semantische Begriffe und Sätze der Prädikatenlogik — **133**

4.2.5 Substitution und Ersetzung in PL1 — **136**

4.2.6 Entscheidungsprobleme* — **139**

4.2.7 PL1-Beweisverfahren und -Algorithmen* — **141**

4.2.8 Prädikatenlogik mit Identität — **148**

4.3 Übungsaufgaben — **150**

5 Zahlen und Anzahlen — 163

5.1 Zahlen — **164**

5.1.1 Natürliche Zahlen und ihre Operationen — **164**

5.1.2 Ganze Zahlen — **169**

5.1.3 Rationale Zahlen — **172**

5.1.4 Reelle und komplexe Zahlen* — **175**

5.2 Anzahlen — **181**

5.2.1 Mächtigkeit und endliche Anzahlen — **181**

5.2.2 Abzählende Kombinatorik — **184**

5.2.3 Unendliche Anzahlen — **193**

5.3 Elementare Zahlentheorie* — **205**

5.3.1 Teiler und Restklassenarithmetik — **205**

5.3.2 Primzahlen, ggT und Restklassengleichungen — **207**

5.4 Übungsaufgaben — **217**

6 Graphen — 226

- 6.1 Einführende Beispiele — 227
- 6.2 Definition, Grundbegriffe — 230
- 6.3 Darstellungsfragen — 232
- 6.3.1 Zeichnerische Darstellung in der Ebene — 232
- 6.3.2 Andere Darstellungen von Graphen — 234
- 6.4 Isomorphie — 235
- 6.5 Nachbarschaft, Wege — 236
- 6.5.1 ... in ungerichteten Graphen — 236
- 6.5.2 ... in gerichteten Graphen — 237
- 6.5.3 ... und in beiden — 238
- 6.5.4 Zwei Hilfssätze für die theoretische Informatik — 238
- 6.5.5 Weglängen — 241
- 6.5.6 Zusammenhang — 242
- 6.5.7 Spezielle Wege — 243
- 6.6 Bäume — 246
- 6.6.1 Bäume – ein Thema mit Variationen — 246
- 6.6.2 Gerichtete ungeordnete Bäume — 248
- 6.6.3 Ungerichtete ungeordnete Bäume — 249
- 6.6.4 Parallelen zwischen gerichteten und ungerichteten Bäumen — 251
- 6.6.5 Geordnete Bäume — 252
- 6.6.6 Spannbäume — 253
- 6.6.7 Baumbezogene Graphenalgorithmen — 254
- 6.6.8 Unendliche Bäume — 257
- 6.7 Beschriftete Graphen — 258
- 6.7.1 Endliche Automaten — 258
- 6.7.2 Termsyntax — 260
- 6.7.3 Färbungen — 260
- 6.8 Einfache Algorithmen für endliche Graphen — 261
- 6.8.1 Graphendurchläufe, Zusammenhang, Spannbäume — 261
- 6.8.2 Besondere Wege: kürzeste, längste, Euler'sche und Hamilton'sche — 264
- 6.9 Übungsaufgaben — 267

7 Algebra — 273

- 7.1 Gruppen — 273
- 7.1.1 Definition, Beispiele, Grundeigenschaften — 273
- 7.1.2 Gruppenhomomorphismen — 278
- 7.1.3 Untergruppen — 279
- 7.2 Ringe und Körper — 285
- 7.2.1 Ringe — 285
- 7.2.2 Körper — 290
- 7.3 Verbände* — 292

7.4	Vektorräume — 295
7.4.1	Definition und Beispiele — 296
7.4.2	Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension — 297
7.4.3	Untervektorräume — 303
7.4.4	Lineare Abbildungen und Matrizen — 305
7.4.5	Lineare Gleichungssysteme — 314
7.4.6	Räume linearer Abbildungen — 317
7.4.7	Basistransformationen — 324
7.4.8	Determinanten — 325
7.4.9	Eigenwerte und Eigenvektoren — 332
7.5	Quotienten* — 335
7.5.1	Normalteiler und Faktorgruppen — 336
7.5.2	Ideale und Restklassenringe — 339
7.5.3	Quotientenräume von Vektorräumen — 340
7.5.4	Isomorphiesätze bezüglich Produkten und Quotienten — 341
7.6	Allgemeine Algebra* — 341
7.6.1	Zwei Beispiele — 342
7.6.2	Signaturen, Terme und Spezifikationen — 343
7.6.3	Algebren und Modelle — 344
7.6.4	Initiale Semantik — 346
7.7	Übungsaufgaben — 349
8	Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie — 364
8.1	Markante Beispiele — 364
8.1.1	Die Verdoppelungsstrategie — 364
8.1.2	Das Aufteilungsproblem — 365
8.1.3	Das False-Positive-Problem — 366
8.1.4	Das Geburtstagsphänomen — 366
8.1.5	Das Ziegenproblem — 366
8.1.6	Serien beim Glücksspiel – der Spielerfehlschluss — 368
8.2	Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsmodelle — 368
8.2.1	Zufallsergebnisse — 368
8.2.2	Wahrscheinlichkeit und Ereignisse — 369
8.2.3	Wahrscheinlichkeitsräume — 371
8.2.4	Reiner Zufall — 375
8.3	Abgeleitete Begriffe — 376
8.3.1	Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit — 376
8.3.2	Mehrstufige Zufallsexperimente — 379
8.3.3	Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, Erwartungswerte — 384
8.3.4	Erwartungswerte als Entscheidungsgrundlage — 387
8.3.5	Streuungsmaße — 388
8.4	Anwendungsbeispiele — 393

8.4.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe und Ergebnisse an einem Demonstrationsbeispiel — 393
8.4.2	Ernüchterung bei der Verdopplungsstrategie — 394
8.4.3	Gerechtigkeit beim Aufteilungsproblem — 396
8.4.4	Erleichterung beim False Positive — 397
8.5	Prozesse — 398
8.5.1	Definition und Beispiele — 398
8.5.2	Spezielle Bernoulli-Prozesse — 398
8.5.3	Die hypergeometrische Verteilung — 403
8.5.4	Markow-Ketten* — 405
8.5.5	Zufallsbewegungen* — 410
8.6	Übungsaufgaben — 412

Literatur — 421

Stichwortverzeichnis — 425