

Günter Bärwolff

# **Höhere Mathematik**

## **für Naturwissenschaftler und Ingenieure**

2. Auflage

unter Mitarbeit von  
Gottfried Seifert



**Spektrum**  
AKADEMISCHER VERLAG

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Logische Grundlagen . . . . .	2
1.2	Grundlagen der Mengenlehre . . . . .	8
1.3	Abbildungen . . . . .	15
1.4	Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion . . . . .	16
1.5	Ganze, rationale und reelle Zahlen . . . . .	22
1.6	Ungleichungen und Beträge . . . . .	27
1.7	Komplexe Zahlen . . . . .	36
1.8	Aufgaben . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Analysis von Funktionen einer Veränderlichen</b>	<b>55</b>
2.1	Begriff der Funktion . . . . .	56
2.2	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	62
2.3	Elementare Funktionen . . . . .	65
2.4	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen . . . . .	69
2.5	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	89
2.6	Differenzierbarkeit von Funktionen . . . . .	95
2.7	Lineare Approximation und Differential . . . . .	101
2.8	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen . . . . .	105
2.9	TAYLOR-Formel und der Satz von TAYLOR . . . . .	111
2.10	Extremalprobleme . . . . .	116
2.11	BANACHscher Fixpunktsatz und NEWTON-Verfahren . . . . .	119
2.12	Kurven im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	126
2.13	Integralrechnung . . . . .	136
2.14	Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern . . . . .	162
2.15	Parameterintegrale . . . . .	165
2.16	Uneigentliche Integrale . . . . .	167
2.17	Numerische Integration . . . . .	177
2.18	Interpolation . . . . .	181
2.19	Aufgaben . . . . .	187
<b>3</b>	<b>Reihen</b>	<b>189</b>
3.1	Zahlenreihen . . . . .	190
3.2	Funktionenfolgen . . . . .	199
3.3	Gleichmäßig konvergente Reihen . . . . .	205
3.4	Potenzreihen . . . . .	207
3.5	Operationen mit Potenzreihen . . . . .	210
3.6	Komplexe Potenzreihen, Reihen von $\exp x$ , $\sin x$ und $\cos x$ . . . . .	211
3.7	Numerische Integralberechnung mit Potenzreihen . . . . .	224

3.8	Konstruktion von Reihen . . . . .	226
3.9	FOURIER-Reihen . . . . .	229
3.10	Aufgaben . . . . .	259
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>261</b>
4.1	Determinanten . . . . .	267
4.2	CRAMERSche Regel . . . . .	280
4.3	Matrizen . . . . .	283
4.4	Lineare Gleichungssysteme und deren Lösung . . . . .	302
4.5	Allgemeine Vektorräume . . . . .	310
4.6	Orthogonalisierungsverfahren nach ERHARD SCHMIDT . . . . .	324
4.7	Eigenwertprobleme . . . . .	331
4.8	Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	348
4.9	Aufgaben . . . . .	366
<b>5</b>	<b>Analysis im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>369</b>
5.1	Eigenschaften von Punktmengen aus dem $\mathbb{R}^n$ . . . . .	370
5.2	Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	375
5.3	Kurven im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	376
5.4	Stetigkeit von Abbildungen . . . . .	384
5.5	Partielle Ableitung einer Funktion . . . . .	387
5.6	Ableitungsmatrix und HESSE-Matrix . . . . .	392
5.7	Differenzierbarkeit von Abbildungen . . . . .	394
5.8	Differentiationsregeln und die Richtungsableitung . . . . .	395
5.9	Lineare Approximation . . . . .	398
5.10	Totales Differential . . . . .	400
5.11	TAYLOR-Formel und Mittelwertsatz . . . . .	402
5.12	Satz über implizite Funktionen . . . . .	406
5.13	Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen . . . . .	409
5.14	Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	414
5.15	Ausgleichsrechnung . . . . .	420
5.16	NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme . . . . .	423
5.17	Aufgaben . . . . .	425
<b>6</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>427</b>
6.1	Einführung . . . . .	428
6.2	Allgemeine Begriffe . . . . .	429
6.3	Allgemeines zu Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	430
6.4	Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Variablen . . . . .	433
6.5	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	436
6.6	Durch Transformationen lösbare Differentialgleichungen . . . . .	439
6.7	Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung . . . . .	446
6.8	Lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	462
6.9	Anmerkungen zum "Rechnen" mit Differentialgleichungen . . . . .	483
6.10	Numerische Lösungsmethoden . . . . .	486
6.11	Potenzreihen zur Lösung von Differentialgleichungen . . . . .	496

6.12	BESSELSche und LEGENDRESche Differentialgleichungen . . . . .	499
6.13	Rand- und Eigenwertprobleme . . . . .	510
6.14	Nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	525
6.15	Aufgaben . . . . .	539
<b>7</b>	<b>Vektoranalysis und Kurvenintegrale</b> . . . . .	<b>541</b>
7.1	Die grundlegenden Operatoren der Vektoranalysis . . . . .	542
7.2	Rechenregeln und Eigenschaften der Operatoren der Vektoranalysis . . . . .	546
7.3	Potential und Potentialfeld . . . . .	548
7.4	Skalare Kurvenintegrale . . . . .	549
7.5	Vektorielltes Kurvenintegral – Arbeitsintegral . . . . .	553
7.6	Stammfunktion eines Gradientenfeldes . . . . .	557
7.7	Berechnungsmethoden für Stammfunktionen . . . . .	562
7.8	Vektorpotentiale . . . . .	563
7.9	Aufgaben . . . . .	565
<b>8</b>	<b>Flächenintegrale, Volumenintegrale und Integralsätze</b> . . . . .	<b>567</b>
8.1	Flächeninhalt ebener Bereiche . . . . .	568
8.2	RIEMANNsches Flächenintegral . . . . .	570
8.3	Flächenintegralberechnung durch Umwandlung in Doppelintegrale . . . . .	573
8.4	Satz von GREEN . . . . .	579
8.5	Transformationsformel für Flächenintegrale . . . . .	584
8.6	Integration über Oberflächen . . . . .	589
8.7	Satz von STOKES . . . . .	608
8.8	Volumenintegrale . . . . .	613
8.9	Transformationsformel für Volumenintegrale . . . . .	617
8.10	Satz von GAUSS . . . . .	621
8.11	Aufgaben . . . . .	630
<b>9</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b> . . . . .	<b>633</b>
9.1	Was ist eine partielle Differentialgleichung? . . . . .	634
9.2	Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	635
9.3	Beispiele von partiellen Differentialgleichungen aus der Physik . . . . .	638
9.4	Wellengleichung . . . . .	641
9.5	Wärmeleitungsgleichung . . . . .	673
9.6	Potentialgleichung . . . . .	681
9.7	Aufgaben . . . . .	688
<b>10</b>	<b>Funktionentheorie</b> . . . . .	<b>691</b>
10.1	Komplexe Funktionen . . . . .	692
10.2	Differentiation komplexer Funktionen . . . . .	694
10.3	Elementare komplexe Funktionen und Potenzreihen . . . . .	699
10.4	Konforme Abbildungen . . . . .	701
10.5	Integration komplexer Funktionen . . . . .	705
10.6	Reihenentwicklungen komplexer Funktionen . . . . .	714

10.7	Behandlung von Singularitäten und der Residuensatz . . . . .	715
10.8	Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes . . . . .	722
10.9	Harmonische Funktionen . . . . .	728
10.10	Aufgaben . . . . .	733
<b>11</b>	<b>Integraltransformationen</b> . . . . .	<b>735</b>
11.1	Definition von Integraltransformationen . . . . .	736
11.2	FOURIER-Transformation . . . . .	738
11.3	Umkehrung der FOURIER-Transformation . . . . .	743
11.4	Eigenschaften der FOURIER-Transformation . . . . .	744
11.5	Anwendung der FOURIER-Transformation auf partielle Differentialgleichungen . . . . .	746
11.6	LAPLACE-Transformation . . . . .	748
11.7	Inverse LAPLACE-Transformation . . . . .	751
11.8	Rechenregeln der LAPLACE-Transformation . . . . .	755
11.9	Praktische Arbeit mit der LAPLACE-Transformation und der Rücktransformation . . . . .	762
11.10	Aufgaben . . . . .	769
<b>12</b>	<b>Variationsrechnung und Optimierung</b> . . . . .	<b>771</b>
12.1	Einige mathematische Grundlagen . . . . .	772
12.2	Funktionale auf BANACH-Räumen . . . . .	775
12.3	Variationsprobleme auf linearen Mannigfaltigkeiten . . . . .	787
12.4	Klassische Variationsrechnung . . . . .	792
12.5	Einige Variationsaufgaben . . . . .	795
12.6	Natürliche Randbedingungen und Transversalität . . . . .	802
12.7	Isoperimetrische Variationsprobleme . . . . .	805
12.8	Funktionale mit mehreren Veränderlichen . . . . .	807
12.9	Aufgaben . . . . .	808
<b>13</b>	<b>Elemente der Tensorrechnung</b> . . . . .	<b>809</b>
13.1	Tensoralgebra . . . . .	810
13.2	Tensoranalysis . . . . .	825
13.3	Aufgaben . . . . .	836
<b>14</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> . . . . .	<b>839</b>
14.1	Zufällige Ereignisse . . . . .	840
14.2	Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse . . . . .	846
14.3	Zufallsgrößen . . . . .	855
14.4	Zufällige Vektoren . . . . .	871
14.5	Aufgaben . . . . .	897
<b>15</b>	<b>Statistik</b> . . . . .	<b>899</b>
15.1	Stichproben . . . . .	900
15.2	Punktschätzung . . . . .	903
15.3	Intervallschätzung . . . . .	909
15.4	Statistische Tests . . . . .	922

---

15.5	Korrelations- und Regressionsanalyse . . . . .	932
15.6	Aufgaben . . . . .	942
<b>A</b>	<b>Formelkompendium</b>	<b>945</b>
<b>B</b>	<b>Literaturhinweise</b>	<b>959</b>
	<b>Index</b>	<b>961</b>