

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
01 Grundbegriffe der Aussagen- und Prädikatenlogik	23
1.1 Axiome	23
1.2 Aussagen	25
1.3 Negationen	25
1.4 Aussageformen	26
1.5 Oder-Aussagen	27
1.6 Und-Aussagen, die De Morganschen Gesetze	29
1.7 Implikationen	32
1.8 Der indirekte Beweis	35
1.9 Existenzaussagen	35
1.10 Allaussagen	36
1.11 Verneinungen von Existenz- und Allaussagen	37
1.12 Analyse von Suchkriterien in der Informatik, die Distributivgesetze Übungsaufgaben	38 41
02 Grundbegriffe der Mengenlehre	45
2.1 Grundlegende Definitionen	45
2.2 Teilmenge, Durchschnitt, Vereinigung und Differenzmenge	46
2.3 Einige Eigenschaften der Operatoren \cap und \cup	50
2.4 Kreuzprodukte und Relationen	51
2.5 Abbildungen	54
2.6 Die Potenzmenge Übungsaufgaben	57 58
03 Natürliche Zahlen	61
3.1 Die Peano-Axiome und die vollständige Induktion	61
3.2 Die Fakultät und der Binomialkoeffizient	63
3.3 Permutationen und Gewinnchancen im Lotto	71
3.4 Teiler, ggT und kgV und der Euklidische Algorithmus	74
3.5 Primzahlen Übungsaufgaben	83 90

04	Andere Schreibweisen für die natürlichen Zahlen	93
4.1	Zunächst ein Beispiel	93
4.2	Die allgemeine Theorie	94
4.3	Ein Algorithmus zur Berechnung der Zahlendarstellungen	96
	Übungsaufgaben	102
05	Ganze Zahlen und Rationale Zahlen – Gruppen, Ringe und Körper	105
5.1	Die ganzen Zahlen und die algebraische Struktur einer Gruppe	106
5.2	Die ganzen Zahlen und die algebraische Struktur eines Rings	109
5.3	Die rationalen Zahlen und die algebraische Struktur eines Körpers	110
5.4	Wie »groß« sind die Mengen \mathbb{Z} und \mathbb{Q} ?	116
	Übungsaufgaben	118
06	Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen	121
6.1	Äquivalenzrelationen	121
6.2	Restklassen	125
6.3	Die Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen	127
6.4	Die Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen	136
6.5	Relationale Datenbanken oder: Relationen von Relationen	144
	Übungsaufgaben	147
07	Endliche Gruppen und Endliche Körper	149
7.1	$(\mathbb{Z}_q, +)$ ist eine endliche, kommutative Gruppe	149
7.2	$(\mathbb{Z}_q, +, \cdot)$ ist nur manchmal ein endlicher kommutativer Körper	151
7.3	Beispiele, ein Programm und Gleichungen	153
7.4	Hashing	156
7.5	Prüfziffern	158
	Übungsaufgaben	165
08	Zahlentheorie und Kryptographie	169
8.1	Der »kleine Fermat«	169
8.2	Die Eulersche Phi-Funktion	174
8.3	Eulers Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes	180
8.4	Ein Beispiel für eine Verschlüsselung mit einem öffentlichen Schlüssel	182
	Übungsaufgaben	187

09	Die reellen Zahlen	189
9.1	Irrationale Wurzeln	190
9.2	Was sind irrationale Zahlen? Ein erster Versuch einer Antwort	191
9.3	Warum reelle Zahlen? Eine erste Antwort	193
9.4	Warum reelle Zahlen? Eine zweite Antwort	198
9.5	Zwei Arten von reellen Zahlen	201
9.6	Auch die reellen Zahlen sind aus den natürlichen Zahlen konstruierbar	207
	Übungsaufgaben	212
10	Die komplexen Zahlen	215
10.1	Quadratische Gleichungen in der Menge der reellen Zahlen	216
10.2	Die Einführung von i garantiert die genrelle Lösbarkeit von Quadratischen Gleichungen	221
10.3	Der algebraisch abgeschlossene Körper der komplexen Zahlen	226
10.4	Die Mandelbrot-Menge	241
	Übungsaufgaben	251
11	Lineare Algebra, ein bisschen Geometrie und normierte Räume	253
11.1	Vektorräume – Definitionen und Beispiele	253
11.2	Basis und Dimension	258
11.3	Das Skalarprodukt	261
11.4	Einige geometrische Probleme	266
11.5	Normierte Vektorräume	274
	Übungsaufgaben	275
12	Lineare Gleichungen, Matrizen und Determinanten, Lineare Abbildungen	279
12.1	Der 1-dimensionale Fall: Eine Gleichung mit einer Unbekannten	279
12.2	Das Gaußsche Eliminationsverfahren	280
12.3	Der 2-dimensionale Fall: 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten	281
12.4	Lineare Abbildungen	284
12.5	Rechnen mit Matrizen	286
12.6	Der 3-dimensionale Fall: 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten	290
12.7	Der allgemeine Fall: n Gleichungen mit n Unbekannten	297
	Übungsaufgaben	302

13	Boolesche Algebra	305
13.1	Boolesche Funktionen und digitale logische Gatter	305
13.2	Die Minterm- und Maxterm-Darstellungen beliebiger Boolescher Funktionen	310
	Übungsaufgaben	327
14	Boolesche Gesetze, Dualitäten und Diagramme	331
14.1	Das Boolesche Dualitätsprinzip und 23 wichtige Gesetze	331
14.2	Karnaugh-Veitch Diagramme	336
	Übungsaufgaben	359
15	Leonhard Euler und die 7 Brücken von Königsberg	363
15.1	Das Sieben-Brücken-Problem von Königsberg	363
15.2	Eulers allgemeine Lösung	364
15.3	Wie man einen »blinden« Computer sehend macht	379
15.4	Die eigentliche Programmierung	386
15.5	Euler-Wege	391
15.6	Euler-Wege in gerichteten Graphen	395
	Übungsaufgaben	399
16	Bäume	405
16.1	Aufspannende Bäume	405
16.2	Charakteristika von Bäumen	414
16.3	Gewichtete einfache Graphen	418
16.4	Minimale aufspannende Bäume und der Algorithmus von Prim	423
16.5	Die Programmierung des Algorithmus von Prim	428
	Übungsaufgaben	433
17	Kürzeste Wege und der Algorithmus von Dijkstra	441
17.1	Drei Algorithmen für aufspannende Bäume im Vergleich	441
17.2	Ein Beispiel	442
17.3	Der Algorithmus kann mehr: Wurzelbäume machen es möglich	448
17.4	Nur ein Beweis gibt uns Sicherheit	457
17.5	Die Programmierung von Dijkstras Algorithmus	460
	Übungsaufgaben	465

18	Binärbäume und rekursive Strukturen	467
18.1	Definitionen und Beispiele	467
18.2	Ein Klassenentwurf für einen Binärbaum	473
18.3	Drei Algorithmen zum Navigieren in einem Binärbaum	478
18.4	Ein Parserbaum für mathematische Formeln	481
18.5	Die Programmierung unserer Parse-Algorithmen	494
	Übungsaufgaben	501
19	Paarungsprobleme und ihre ungarischen Lösungen	507
19.1	Defintionen und ein Beispiel	507
19.2	Der Ungarische Algorithmus	518
19.3	Ein Beispiel – zwei Matchings	525
19.4	Nun wieder etwas Theorie	529
19.5	Die Programmierung des Ungarischen Algorithmus	533
	Übungsaufgaben	538
20	Laufzeiten und Komplexitäten, P und NP	541
20.1	Der Logarithmus, Polynome und die Exponentialfunktion	541
20.2	Die Symbole von Paul Bachmann und Edmund Landau, gute und schlechte Algorithmen	544
20.3	Ein kurzer Überblick über unsere bisherigen Algorithmen	548
20.4	P (easy to find) und NP (easy to check)	550
20.5	Eine Eine-Million-Dollar-Frage: $P = NP$?	552
20.6	Ein Märchen	554
	Übungsaufgaben	554
21	Beschreibende Statistik	559
21.1	Der Feldversuch zum Salk-Impfstoff	559
21.2	Häufigkeiten, Histogramme und Empirische Verteilungsfunktionen	561
21.3	Kennzahlen: Lageparameter und geometrische Mittel	572
21.4	Kennzahlen: Streuungsparameter	582
21.5	Eine erste Darstellung der Verteilung einer Messreihe: die Boxplots	586
21.6	Der Vergleich mehrerer numerischer Merkmale	587
21.7	Die lineare Regression mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate	592

21.8	Mehrere qualitative Merkmale bzw. mehrere Rangmerkmale: Kontingenztafeln	599
21.9	Die Unabhängigkeit mehrerer qualitativer Merkmale bzw. mehrerer Rangmerkmale	604
	Übungsaufgaben	613
22	Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	621
22.1	Grundlegende Begriffe	622
22.2	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume, Laplace-Modelle und richtiges Zählen	628
22.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit und mehrstufige Experimente	643
	Übungsaufgaben	651
23	Diskrete Zufallsvariable	657
23.1	Zufallsvariablen	657
23.2	Endliche und diskrete Zufallsvariablen	660
23.3	Diskrete Verteilungen	669
	Übungsaufgaben	680
24	Stetige Zufallsvariable	685
24.1	Was Sie wissen sollten	685
24.2	Stetige Zufallsvariable	688
24.3	Die Standard-Normalverteilung	691
24.4	Die allgemeine Normalverteilung	702
24.5	Der zentrale Grenzwertsatz	710
	Übungsaufgaben	711
25	Schätzungen	715
25.1	Stichproben und die Grundregeln statistischen Arbeitens	715
25.2	Schätzungen von Wahrscheinlichkeiten	718
25.3	Konfidenzintervalle als Bereiche des Vertrauens	721
25.4	Kleine Konfidenzintervalle für Binomialverteilungen – Trau keinem unter 30	727
25.5	Die Größe von Stichproben	733
	Übungsaufgaben	735

26	Tests, Tests, Tests	737
26.1	Ein erstes Beispiel: die tea testing Lady	737
26.2	Grundlegende Bemerkungen und Definitionen	740
26.3	Parametertests für Wahrscheinlichkeiten von wiederholten Bernoulli-Experimenten	744
26.4	Parametertests – Mittelwerte von normal verteilten Werten	750
26.5	Der Chi-Quadrat: Vorbereitungen	755
26.6	Die Chi-Quadrat-Testgröße	760
26.7	Der Chi-Quadrat-Test und Irrtumswahrscheinlichkeiten Übungsaufgaben	766 772
 A1	 Anhang – Was sie schon immer über Analysis wissen wollten	 775
A1.1	Grenzwerte von Funktionen	775
A1.2	Stetige Funktionen	779
A1.3	Ableitungen	782
A1.4	Die Bedeutung der Ableitung	786
A1.5	Umkehrfunktionen	794
A1.6	Integrale und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	797
A1.7	Uneigentliche Integrale	802
A1.8	Die Trigonometrischen Funktionen	804
A1.9	Logarithmus und Exponentialfunktion	813
A1.10	Integrationsregeln und Integrationstechniken	822
A1.11	Gute Nacht, Freunde	824
 A2	 Anhang – Einige Werte der Standardnormalverteilung	 833
	Literatur- und Linkverzeichnis	835
	Index	837