

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Begriffe und Schreibweisen	1
1.1	Zahlen	1
1.1.1	Zahlendarstellung auf der Zahlengeraden	1
1.2	Mengen	3
1.2.1	Aufzählende Mengenschreibweise	3
1.2.2	Beschreibende Mengenschreibweise	3
1.2.3	Mengendiagramme	4
1.2.4	Beziehungen zwischen Mengen (Mengenrelationen)	4
1.2.5	Mengenverknüpfungen (Mengenoperationen)	5
1.3	Intervallschreibweisen	8
1.4	Symbole der Logik	8
2	Rechnen mit Termen	9
2.1	Grundrechenarten mit Termen	9
2.1.1	Addition und Subtraktion (Rechnen mit Klammertermen)	10
2.1.2	Klammern in Klammern	10
2.2	Multiplikation und Division	11
2.2.1	Multiplikation mit negativen Zahlen	11
2.2.2	Multiplikation mit Null (Nullprodukt)	11
2.2.3	Multiplikation mit Summentermen	12
2.2.4	Binomische Formeln	13
2.2.5	Quotienten aus positiven und negativen Zahlen	16
2.2.6	Rechnen mit Bruchtermen	18
3	Lineare Gleichungen	27
3.1	Äquivalenz von Aussageformen	27
3.2	Lösungsverfahren für lineare Gleichungen	28
3.3	Einfache lineare Gleichungen	29
3.4	Bruchgleichungen	31
3.5	Gleichungen mit Formvariablen	34
3.6	Verhältnissgleichungen (Proportionen)	40
3.7	Textliche Gleichungen	43
3.7.1	Allgemeine textliche Gleichungen	43
3.7.2	Mischungsaufgaben	45
3.7.3	Bewegungsaufgaben	48
3.7.4	Behälteraufgaben	51
3.7.5	Arbeitsaufgaben	53
4	Funktionen 1. Grades	56
4.1	Der Funktionsbegriff	56
4.2	Darstellung von Funktionen	57
4.3	Funktionsdarstellung im Koordinatensystem	58
4.3.1	Das rechtwinklige Koordinatensystem	58
4.3.2	Das Polarkoordinatensystem	59

4.4	Lineare Funktionen der Technik	61
4.5	Die lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $y = mx$	62
4.6	Die Funktion 1. Grades mit der Funktionsgleichung $y = mx + b$	64
4.7	Graphische Darstellung linearer Zusammenhänge	66
5	Systeme linearer Gleichungen	69
5.1	Graphisches Lösungsverfahren von Gleichungssystemen	69
5.2	Rechnerische Lösungsverfahren von Gleichungssystemen	70
5.2.1	Das Gleichsetzungsverfahren	71
5.2.2	Das Einsetzungsverfahren	71
5.2.3	Das Additionsverfahren	74
5.2.4	Das Determinantenverfahren	77
5.2.5	Gleichungssysteme mit Bruchtermen	79
5.3	Lösungsverfahren für Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen	82
5.4	Textaufgaben mit zwei Variablen	88
5.4.1	Mischungsaufgaben	88
5.4.2	Bewegungsaufgaben	89
5.4.3	Behälteraufgaben	90
6	Potenzen	93
6.1	Potenzbegriff	93
6.2	Potenzgesetze	93
6.2.1	Addition und Subtraktion von Potenzen	93
6.2.2	Multiplikation von Potenzen	94
6.2.3	Division von Potenzen	95
6.2.4	Potenzieren von Potenzen	96
6.3	Erweiterung des Potenzbegriffes auf a^1 , a^0 und Potenzen mit negativen ganzen Hochzahlen	96
6.4	Besondere Potenzen (Zehnerpotenzen)	98
6.5	Potenzen von Binomen	101
7	Wurzeln	103
7.1	Wurzelbegriff	103
7.1.1	Quadratwurzeln	103
7.1.2	Der allgemeine Wurzelbegriff	106
7.2	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen	107
7.3	Rechnen mit Wurzel- und Potenztermen	109
8	Quadratische Gleichungen	114
8.1	Rechnerische Lösung quadratischer Gleichungen	115
8.1.1	Reinquadratische Gleichungen	115
8.1.2	Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied	117
8.1.3	Gemischtquadratische Gleichungen	117
8.2	Lösbarkeit quadratischer Gleichungen, Diskriminante	119
8.3	Koeffizientenregel von Vieta	120
8.4	Biquadratische Gleichungen	123
8.5	Quadratische Gleichungssysteme mit zwei Variablen	123
8.6	Textaussagen, die auf quadratische Gleichungen führen	125

9	Wurzelgleichungen	129
9.1	Wurzelgleichungen mit einer Variablen	129
9.2	Wurzelgleichungen mit zwei Variablen	132
10	Ungleichungen	135
10.1	Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen	135
10.2	Einfache lineare Ungleichungen	138
10.3	Bruchungleichungen	138
11	Lineare Ungleichungssysteme	144
12	Lineares Optimieren	147
13	Quadratische Funktionen	156
13.1	Die allgemeine quadratische Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$ und ihre graphische Darstellung	157
13.2	Die Scheitelform der quadratischen Funktionsgleichung	161
13.3	Extremwertaufgaben	163
13.4	Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Vorgaben	166
13.5	Graphische Lösung quadratischer Gleichungen	170
14	Potenzfunktionen	171
14.1	Die Funktionen $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	172
14.1.1	Achsensymmetrische Parabeln (n gerade)	172
14.1.2	Punktsymmetrische Parabeln (n ungerade)	172
14.2	Die Funktionen $x \mapsto x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$)	173
14.2.1	Punktsymmetrische Hyperbeln (n ungerade)	173
14.2.2	Achsensymmetrische Hyperbeln (n gerade)	173
15	Wurzelfunktionen	174
15.1	Quadratwurzelfunktionen	174
15.2	Wurzelfunktionen höherer Ordnung	177
16	Exponentialfunktionen	180
16.1	Die allgemeine Exponentialfunktion	180
16.2	Die e-Funktion	183
17	Logarithmen	189
17.1	Logarithmenbegriff	189
17.2	Logarithmensysteme	190
17.2.1	Natürliche Logarithmen	190
17.2.2	Zehnerlogarithmen	191
17.3	Logarithmengesetze	192
18	Logarithmusfunktionen	196
18.1	Die allgemeine Logarithmusfunktion	196
18.2	Die natürliche Logarithmusfunktion	198

19 Exponentialgleichungen	199
20 Analytische Geometrie	204
20.1 Länge und Steigung von Strecken	204
20.2 Teilpunkte von Strecken	206
20.2.1 Mittelpunkte von Strecken	206
20.2.2 Beliebiger Teilpunkt T einer Strecke	206
20.3 Geradengleichungen	207
20.3.1 Punkt-Steigungs-Form	207
20.3.2 Zwei-Punkte-Form	208
20.3.3 Achsenabschnittsform	209
20.3.4 HESSE-Form der Geradengleichung	210
20.4 Winkel zwischen Geraden	213
20.4.1 Winkel zwischen Gerade und x-Achse (Steigung und Steigungswinkel)	213
20.4.2 Schnittwinkel zweier Geraden	215
20.5 Orthogonale Geraden	216
20.6 Kreisgleichungen	218
20.6.1 Mittelpunktsgleichung eines Kreises	218
20.6.2 Allgemeine Kreisgleichung	219
20.7 Kreis und Gerade	221
20.8 Parabeln und Hyperbeln	225
20.8.1 Brennpunkteigenschaften der Parabel	225
20.8.2 Brennpunkteigenschaften der Hyperbel	227
21 Koordinatensystem mit logarithmischer Teilung	228
Trigonometrie	
22 Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck	229
22.1 Seitenverhältnisse als Winkelfunktionen	229
22.2 Definition der Winkelfunktionen	230
22.3 Längen- und Winkelberechnungen	230
22.3.1 Die Sinusfunktion	230
22.3.2 Die Kosinusfunktion	232
22.3.3 Die Tangens- und Kotangensfunktion	235
22.3.4 Vermischte Aufgaben	236
22.4 Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen	243
22.5 Winkelfunktionen beliebiger Winkel	245
22.6 Die Graphen der Winkelfunktionen	249
22.6.1 Die Schaubilder der Sinus- und Kosinusfunktion	251
22.6.2 Die allgemeine Sinusfunktion und ihre graphische Darstellung	251
22.6.3 Die Schaubilder der Tangens- und Kotangensfunktion	254
22.7 Trigonometrische Gleichungen	256
23 Winkelfunktionen am schiefwinkligen Dreieck	259
23.1 Sinussatz	259
23.2 Kosinussatz	266
23.3 Flächenberechnung des schiefwinkligen Dreiecks	274

24 Additionstheoreme	276
24.1 Funktionen der doppelten und halben Winkel	280
25 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	282
25.1 Satz des Pythagoras	282
25.2 Kathetensatz (Satz des Euklid)	296
25.3 Höhensatz	298
26 Ähnlichkeit	301
26.1 Strahlensätze	301
26.2 Streckenteilung und Mittelwerte	308
26.3 Stetige Teilung (Goldener Schnitt)	311
27 Flächenberechnung	315
27.1 Geradlinig begrenzte Flächen	315
27.2 Kreisförmig begrenzte Flächen	318
28 Volumenberechnung	326
28.1 Prismatische Körper	326
28.2 Pyramidenförmige und kegelförmige Körper	332
28.2.1 Pyramide und Pyramidenstumpf	332
28.2.2 Kegel und Kegelstumpf	333
28.3 Kugelförmige Körper	337
28.3.1 Vollkugel	337
28.3.2 Kugelabschnitt (Kugelsegment)	340
28.3.3 Kugelschicht	341
28.3.4 Kugelausschnitt (Kugelsektor)	344
28.4 Schiefe Körper	349
28.4.1 Satz des Cavalieri	349
28.4.2 Simpson'sche Regel	350
28.5 Oberflächen und Volumina von Rotationskörpern (Guldin'sche Regel)	352

Differentialrechnung

29 Grenzwerte	355
29.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen	355
29.2 Grenzwerte von Funktionen	356
29.2.1 Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$	356
29.2.2 Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$	358
29.2.3 Rechenregeln für Grenzwerte	359
30 Stetigkeit von Funktionen	361
31 Differentiation elementarer Funktionen	363
31.1 Differenzenquotient und Differentialquotient	363
31.2 Ableitung von Potenzfunktionen	364
31.3 Allgemeine Ableitungsregeln	365

31.4	Ableitung elementarer Funktionen (Übersicht)	368
31.5	Höhere Ableitungen	369
32	Horner-Schema und Nullstellen ganzrationaler Funktionen	372
32.1	Polynomdivision	372
32.2	Horner-Schema	373
33	Das Newton'sche Näherungsverfahren	376
34	Anwendung der Differentialrechnung bei ganzrationalen Funktionen	378
34.1	Kurvendiskussion	378
34.2	Funktionssynthese	385
34.3	Extremwertaufgaben	389
35	Gebrochenrationale Funktionen	396
36	Trigonometrische Funktionen	402
36.1	Ableitungen	402
36.2	Funktionsuntersuchung trigonometrischer Funktionen	403
36.3	Funktionssynthese trigonometrischer Funktionen	408
37	Logarithmus- und Exponentialfunktionen	411
37.1	Ableitungen	411
37.1.1	Ableitung der Logarithmusfunktionen	411
37.1.2	Ableitung der Exponentialfunktionen	411
37.2	Funktionsuntersuchung von Exponentialfunktionen	412
37.3	Funktionssynthese von Exponentialfunktionen	415
 Integralrechnung		
38	Der Begriff des Integrals	417
38.1	Die Flächeninhaltsfunktion	417
38.2	Stammfunktionen (= unbestimmte Integrale)	418
38.3	Grundintegrale elementarer Funktionen	420
38.4	Das bestimmte Integral als Fläche	420
38.5	Die Fläche als Grenzwert	421
39	Flächenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung	423
39.1	Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse	423
39.2	Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen	426
40	Das bestimmte Integral als Volumen (Volumen von Rotationskörpern)	434
40.1	Rotationssymmetrie zur x-Achse	434
40.2	Rotationssymmetrie zur y-Achse	435

Vektorrechnung – Analytische Geometrie auf Vektorbasis

41 Punkte und Vektoren	436
41.1 Definition eines Vektors	436
41.2 Ortsvektoren	437
41.3 Betrag eines Vektors	438
41.4 Vektoren im Raum	438
41.4.1 Vektor-Addition	438
41.4.2 Vektor-Subtraktion	439
41.4.3 Anwendungsbeispiele	439
41.4.4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (S-Multiplikation)	440
41.4.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren	441
42 Geraden im Raum	447
42.1 Vektorielle Geradengleichungen	447
42.1.1 Punkt-Richtungs-Gleichung	447
42.1.2 Zwei-Punkte-Gleichung	448
42.2 Darstellung von Geraden	449
42.2.1 Räumliche Darstellung im Koordinatensystem	449
42.2.2 Projektion einer Geraden auf die Koordinatenebenen	450
42.2.3 Spurpunkte von Geraden	451
42.3 Spezielle Geraden	453
42.4 Schnittpunkt zweier Geraden	455
43 Vektorielle Darstellung von Ebenen	459
43.1 Parameterdarstellung einer Ebene	459
43.1.1 Punkt-Richtungs-Gleichung	459
43.1.2 Drei-Punkte-Gleichung	460
43.2 Koordinatengleichung der Ebene	461
43.3 Achsenabschnittsgleichung	462
43.4 Zeichnerische Darstellung von Ebenen	462
43.4.1 Spurgeraden von Ebenen	462
43.4.2 Zeichnen einer Ebene	464

Produkte von Vektoren

44 Das Skalarprodukt	466
44.1 Winkel zwischen Vektoren	466
44.2 Definition des Skalarproduktes	467
44.3 Anwendungen des Skalarproduktes	468
44.3.1 Winkel eines räumlichen Dreiecks	468
44.3.2 Schnittwinkel von Geraden	468
45 Das Vektorprodukt	470
45.1 Definition des Vektorproduktes	470
45.2 Anwendungen des Vektorproduktes	472

46 Das Skalarprodukt	475
46.1 Definition des Skalarproduktes	475
46.2 Anwendungen des Skalarproduktes	476
47 Normalenformen der Ebenengleichung	479
47.1 Punkt-Normalengleichung der Ebene	479
47.2 Hesse'sche Normalengleichung der Ebene	481
48 Abstandsberechnungen	483
48.1 Abstand eines Punktes von einer Ebene	483
48.2 Abstand einer Ebene vom Ursprung	484
48.3 Abstand paralleler Ebenen	484
48.4 Abstand eines Punktes von einer Geraden	485
48.5 Abstand windschiefer Geraden	486
49 Schnittwinkel	490
49.1 Schnittwinkel von Gerade und Ebene	490
49.2 Schnittwinkel zweier Ebenen	491
49.3 Schnittwinkel zweier Geraden	491
50 Umrechnung von Ebenengleichungen	493
51 Inzidenz von Geraden und Ebenen	497
51.1 Schnittgerade zweier Ebenen	497
51.2 Schnittpunkt von Geraden und Ebenen	499
51.3 Parallelität und Inzidenz von Ebenen	501
51.4 Parallelität und Inzidenz von Geraden	502

Komplexe Zahlen und Funktionen

52 Grundbegriffe der komplexen Rechnung	504
52.1 Imaginäre Zahlen	504
52.2 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$	506
52.3 Gauß'sche Zahlenebene	507
53 Darstellungsformen komplexer Zahlen	508
53.1 Komplexe Zahlen in Komponentenform	508
53.2 Komplexe Zahlen in Polarform	510
53.2.1 Trigonometrische Form	510
53.2.2 Komplexe Zahlen in Exponentialform	510
54 Komplexe Arithmetik	512
54.1 Rechenoperationen in der Komponentenform	512
54.1.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	512
54.1.2 Multiplikation und Division komplexer Zahlen	513
54.2 Rechenoperationen in der Polarform	514
54.2.1 Multiplikation in der trigonometrischen Form	514
54.2.2 Division in der trigonometrischen Form	516

54.2.3	Potenzieren in der Exponentialform	517
54.2.4	Radizieren in der Exponentialform	517
54.2.5	Logarithmieren in der Exponentialform	518
55	Anwendungen der komplexen Rechnung	520
55.1	Komplexe Funktionen	520
55.2	Symbolische Darstellung von Schwingungen	521
55.3	Komplexe Widerstände	522
55.4	Ortskurven	524
55.5	Inversion einer Ortskurve	526
Lösungen		530
Sachwortverzeichnis		569