

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Historische Anfänge	5
2.1	Die Arithmetik der Spielsteine	5
2.2	Gnomone	7
2.2.1	Zum Begriff des Gnomons	7
2.2.2	Gnomone in der Mathematik	9
2.2.3	Gnomone: Eine erste Zusammenfassung	13
3	Einführende Beispiele, Potenzsummen	15
3.1	Dreieckszahlen / Triagonalzahlen	15
3.2	Trapezzahlen	17
3.3	Viereckszahlen / Quadratzahlen	19
3.3.1	Quadratzahlen, ungerade Zahlen und die Gnomon-Methode	19
3.3.2	Quadratzahlen und babylonische Multiplikation	21
3.3.3	Summen von Quadratzahlen	22
3.3.4	Ungerade Quadratzahlen	23
3.4	Kubikzahlen	29
4	Polygonal- und Pyramidalzahlen	39
4.1	Nichtzentrierte Polygonalzahlen	40
4.1.1	Beispiele	40
4.1.2	Das Konstruktionsprinzip der nichtzentrierten Polygonalzahlen	41
4.1.3	Die explizite Darstellung der nichtzentrierten Polygonalzahlen	42
4.2	Zentrierte Polygonalzahlen	43
4.3	Pyramidalzahlen	46
4.4	Bemerkungen zur Symbolverarbeitung	49
5	Systematisierung durch Differenzenbildung	51
5.1	Differenzenfolgen von Polygonal- und Pyramidalzahlen	51
5.2	Allgemeine Differenzenfolgen	53
5.3	Ein kleines Szenario zum Differenzenkalkül im Computeralgebra System Maxima	57

6	Wechselwegnahme und Euklidischer Algorithmus	61
6.1	Wechselwegnahme, Kommensurabilität und Inkommensurabilität	62
6.2	Die Division mit Rest	64
6.3	Größter gemeinsamer Teiler (ggT) und kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)	65
6.4	Der Euklidische Algorithmus	68
6.5	Kettenbrüche	71
7	Figurierte Fibonacci-Zahlen	75
7.1	Historischer Kontext	75
7.2	Definition der Fibonacci-Zahlen in heutiger Notation	78
7.3	Veranschaulichung der definierenden Gleichung	79
7.4	Weitere auf den Fibonacci-Zahlen basierende Veranschaulichungen	80
7.4.1	Quadrate und Rechtecke aus Fibonacci-Zahlen	80
7.4.2	Fibonacci-Zahlen und optische Täuschungen	82
7.5	Die Fibonacci-Zahlen und der Euklidische Algorithmus	84
7.6	Die Formel von Binet	85
7.7	Konkrete Berechnung der Fibonacci-Zahlen	86
7.7.1	Rekursives Verfahren	87
7.7.2	Iteratives Verfahren	88
7.7.3	Berechnung mit Hilfe der Formel von Binet	89
7.7.4	Berechnung der Fibonacci-Zahlen mit Matrizen	90
7.7.5	Teile und Herrsche	90
8	Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt	93
8.1	Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen	93
8.2	Der Goldene Schnitt	97
9	Phyllotaxis	99
9.1	Erste Beobachtungen	99
9.2	Modell und Simulation	102
9.3	Zusammenfassung	107
10	Lineare Differenzengleichungen und die Herleitung der Formel von Binet	111
10.1	Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung	111
10.2	Lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung	112
11	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	115
11.1	Die natürlichen Zahlen	116
11.2	Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion	117
11.3	Beispiele zur vollständigen Induktion	119
11.3.1	Einige typische Beispiele	119
11.3.2	Einige nicht so ganz typische Beispiele	124
11.3.3	Zahlenmuster und vollständige Induktion	126

11.3.4	Vollständige Induktion im Zusammenhang mit Mengen	131
11.3.5	Vollständige Induktion im Zusammenhang mit Beispielen aus der Geometrie	134
11.3.6	Definition durch vollständige Induktion.....	138
11.3.7	Vollständige Induktion und andere Beweistechniken	139
11.3.8	Scheinbeweise, Lustiges und Merkwürdiges	142
11.3.9	Ein frühes historisches Beispiel zur vollständigen Induktion	143
11.3.10	Muss es immer vollständige Induktion sein?	144
A Analyse einiger ausgewählter Konfigurationen		147
B Bildnachweise		153
Literatur		155
Stichwortverzeichnis		159