Inhalt

Vorwort 5

1. Grundbegriffe 11

1.1. Mengen 11
1.2. Gruppen 12
1.3. Körper 13
1.4. Abbildungen 14

2. Einführung von Punkt- und Vektorräumen 16

2.1. Der n-dimensionale Punktraum $\mathbb{R}^n$ 16
2.2. Allgemeine Vektorräume 20
2.3. Der n-dimensionale Vektorraum $\mathbb{V}^n$ 24
2.4. Vektoren des $\mathbb{V}^n$ als Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ auf sich 27
2.5. Ortsvektoren, Parameterdarstellung von Geraden 31
2.6. Der Vektorraum der stetigen Funktionen C[a, b] 36

3. Allgemeine Vektorräume 37

3.1. Linearkombinationen, lineare Teilräume 37
3.2. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit 38
3.3. Der Austauschsatz von STEINITZ 42
3.4. Endlichdimensionale Vektorräume 46

4. Matrizen 51

4.1. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit im $\mathbb{V}^n$ 51
4.2. Definition einer Matrix 52
4.3. Zeilen- und Spaltenoperationen 54
4.4. Der Rang einer Matrix 58
4.5. Rechenoperationen für Matrizen 61

5. Lineare Teilräume des $\mathbb{R}^n$ 66

5.1. Definition von linearen Teilräumen des $\mathbb{R}^n$ 66
5.2. Lineare Teilräume durch vorgegebene Punkte 69
5.3. Durchschnitt von linearen Teilräumen des $\mathbb{R}^n$ 72
5.4. Parallelität von linearen Teilräumen des $\mathbb{R}^n$ 74

6. Lineare Gleichungssysteme 76

6.1. Definition eines linearen Gleichungssystems, Lösbarkeit 76
6.2. Umformungen eines linearen Gleichungssystems 78
6.3. Lösung homogener linearer Gleichungssysteme 85
6.4. Lösung linearer Gleichungssysteme 87
6.5. Lineare Gleichungssysteme und lineare Teilräume 90
6.6. Der Durchschnitt linearer Teilräume des $\mathbb{V}^n$ und $\mathbb{R}^n$ 94

7. Der euklidische Punktraum $\mathbb{R}^n$ 95

7.1. Definition eines metrischen Raumes 95
7.2. Einführung einer Metrik im $\mathbb{R}^1$ 96
7.3. Einführung der euklidischen Metrik im $\mathbb{R}^n$ 97

8. Der euklidische Vektorraum $\mathbb{V}^n$, HILBERT-Räume 100

8.1. Definition eines normierten Vektorraumes 100
8.2. Einführung der euklidischen Norm im $\mathbb{V}^n$ 101
8.3. HILBERT-Räume 103
8.4. Der Vektorraum $\mathbb{V}^n$ als HILBERT-Raum 103
8.5. Der Funktionenraum C[a, b] als HILBERT-Raum 104
8.6. Die SCHWARZsche Ungleichung 105
8.7. HILBERT-Räume als normierte Räume 107
8.8. Die Einführung von Winkeln 108
8.9. Orthonormalsysteme 111
8.10. Das Orthonormalisierungsverfahren von ERHARD SCHMIDT . . 113
8.11. Das Abstandsproblem 117
8.12. Das Vektorprodukt im HILBERT-Raum $\mathbb{V}^3$ 123

9. Das Volumenproblem, Determinanten 127

9.1. Parallelflache im $\mathbb{R}^n$ 127
9.2. Das Volumenproblem 129
9.3. Das Determinantenproblem 132
9.4. Erste Folgerungen aus den Determinantenaxiomen 133
9.5. Die Summendarstellung der Determinante 136
9.6. Existenz der Determinante 139
9.7. Eindeutigkeit der Determinante 140
9.8. Die Lösung des Volumenproblems 140
9.9. Die Determinante als Funktion der Spaltenvektoren 142
9.10. Berechnung von Determinanten 143
9.11. Der Produktsatz für Determinanten 146
9.12. Entwicklung einer Determinante nach Zeilen oder Spalten 147

9.13. Die Inverse einer $(n \times n)$-Matrix . . . 152
9.14. Die CRAMERsche Regel . . . 154
9.15. Der Determinantenrang einer Matrix . . . 155

10. Lineare Abbildungen . . . 158

10.1. Definition einer linearen Abbildung . . . 158
10.2. Einige wichtige Eigenschaften linearer Abbildungen . . . 161
10.3. Der Isomorphiesatz für n-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ . . . 163
10.4. Lineare Abbildungen und Matrizen . . . 165
10.5. Der Vektorraum der linearen Abbildungen . . . 172
10.6. Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen . . . 174
10.7. Basistransformationen, Orthonormalmatrizen . . . 175
10.8. Lineare Abbildungen und Basistransformationen . . . 179
10.9. Bilinearformen, quadratische Formen . . . 180
10.10. Selbstadjungierte Abbildungen . . . 183
10.11. Koordinatensysteme im $\mathbb{R}^n$ . . . 184

11. Eigenwertprobleme . . . 187

11.1. Problemstellung . . . 187
11.2. Eigenwerte und Eigenvektoren bei linearen Abbildungen . . . 189
11.3. Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 191
11.4. Das Matrizenproblem bei linearen Abbildungen . . . 193
11.5. Diagonalisierung von selbstadjungierten Abbildungen . . . 195
11.6. Diagonalisierung von quadratischen Formen . . . 202

12. Abriß der Geschichte der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra 206

12.1. Die ersten Ansätze . . . 206
12.2. Mathematik als beweisende Wissenschaft bei den Griechen . . . 207
12.3. Die Entstehung der Analytischen Geometrie im 17. Jahrhundert . . . 208
12.4. Die Beiträge von Euler und Lagrange . . . 210
12.5. Die Wirkung der französischen Lehrbücher . . . 211
12.6. Verallgemeinerte Koordinaten, Quaternionen, Ausdehnungslehre . . . 212
12.7. Determinanten, Matrizen, Invarianten . . . 214
12.8. Axiomatik und abstrakte Strukturen . . . 215
12.9. Topologie, Mengenlehre, abstrakte Räume . . . 216

Literatur . . . 218

Literatur zur Geschichte der Mathematik . . . 219

Register . . . 220