

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

1 Was erwartet die Leserin und den Leser	1
1.1 Mathematik ist Mathematik ist Mathematik	1
1.2 Zentrale didaktische Prinzipien in diesem Buch	2
1.3 Worum geht es in diesem Buch?	4
1.4 Was ist bei der Lektüre dieses Buches zu beachten?	6
2 Zu den Grundlagen der Geometrie	9
2.1 Vernetzung mit dem mathematischen Schulstoff	9
2.2 Historischer Überblick von <i>Euklid</i> bis <i>Hilbert</i>	12
2.3 Die verschiedenen „Geometrien“	25
2.4 Affine Ebenen und ihre Koordinatenkörper	27
2.4.1 Affine Ebenen	28
2.4.2 Konstruktion des Koordinatenkörpers	29
2.4.3 Automorphismen von \mathbb{A}	34
2.4.4 Die Schließungssätze	39
2.4.5 Der Strukturzusammenhang	42
3 Geometrische Konstruktionen	47
3.1 Vernetzung mit dem mathematischen Schulstoff	47
3.2 Einige klassische Probleme	50
3.3 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	54
3.4 Origamics – faltbare Mathematik	59
3.5 Das Deli’sche Problem der Würfelverdoppelung	62
3.6 Die Trisektion des Winkels	64
3.6.1 Die Unmöglichkeit der Winkeldrittteilung	64
3.6.2 Die Winkeldrittteilung nach <i>Archimedes</i> und andere Methoden	66
3.6.3 Eine Papierfalt-Konstruktion	67
3.7 Die Quadratur des Kreises	68
3.8 Die Konstruktion des regelmäßigen n -Ecks	72
3.8.1 Elementare Überlegungen	72
3.8.2 Das Ergebnis von <i>Gauß</i>	73
3.8.3 Das regelmäßige 5-Eck	78
3.8.4 Das regelmäßige 7-Eck	87
3.8.5 Das regelmäßige 17-Eck	91
4 Symmetriegruppen	93
4.1 Vernetzung mit dem mathematischen Schulstoff	93
4.2 Die Gruppe der Bewegungen	97
4.3 Symmetriegruppen von Polygonen	106
4.3.1 Die Quadratgruppe Q	107
4.3.2 Regelmäßige n -Ecke und Diedergruppen \mathbb{D}_n	108
4.4 Symmetriegruppen von Polyedern	111
4.4.1 Polyeder und <i>Platonische</i> Körper	111

4.4.2 Bestimmung der Drehgruppen starrer Körper	120
4.5 Bandornamente und ihre sieben Symmetriegruppen	128
4.6 Die 17 ebenen kristallographischen Symmetriegruppen	135
4.6.1 Periodische Pflasterungen der Ebene (Flächenornamente)	135
4.6.2 Wandmuster und zugehöriges Gitter	140
4.6.3 Die möglichen Gitter-Fixgruppen $\Gamma_0(G)$	142
4.6.4 $\Gamma(F)$ enthält nur Drehungen	145
4.6.5 $\Gamma(F)$ enthält Achsen- oder Gleitspiegelungen	147
4.6.6 Übersicht über die Symmetriertypen	154
4.6.7 Untersuchung von Flächenornamenten	157
4.6.8 Die fünfeckigen Kacheln von <i>Rosemary Grazebrook</i>	160
4.6.9 Die nichtperiodischen Flächenornamente von <i>Roger Penrose</i>	161
4.7 „Beweise, die erklären“ oder „Beweise, die nur beweisen“	167
5 Algebraische Gleichungen mit einer Variablen	169
5.1 Vernetzung mit dem mathematischen Schulstoff	169
5.2 Auflösung durch Radikale	173
5.2.1 Lösungen und Lösungsformeln	173
5.2.2 Algebraische Gleichungen vom Grad ≤ 4	174
5.2.3 Die <i>Cardanoschen Formeln</i>	177
5.3 Elementare Methoden	186
5.3.1 Hilfsmittel aus Algebra und Analysis	186
5.3.2 Division mit Rest im Polynomring	188
5.3.3 Die Methode von <i>Sturm</i>	192
5.4 Die Nichtauflösbarkeit für $n \geq 5$	194
5.5 Der Fundamentalsatz der Algebra	201
5.5.1 Der Fundamentalsatz	202
5.5.2 Der elementare Beweis nach <i>Argand</i>	203
5.5.3 Beweis mit dem Satz von <i>Liouville</i>	205
5.5.4 Galoistheoretischer Beweis	205
5.5.5 Topologische Beweisvariante nach <i>Gauß</i>	206
6 Der Aufbau des Zahlensystems: Von den natürlichen zu den komplexen Zahlen	213
6.1 Vernetzung mit dem mathematischen Schulstoff	213
6.2 Überblick über unser Zahlensystem	217
6.2.1 Der Aufbau des Zahlensystems	217
6.2.2 Die Messung des Unendlichen	218
6.3 Die natürlichen Zahlen	223
6.3.1 Konstruktion von \mathbb{N} als „Kardinalzahlen“	224
6.3.2 Konstruktion von \mathbb{N} als „Ordinalzahlen“	225
6.3.3 Der konstruktivistische Ansatz	226
6.3.4 Die axiomatische Charakterisierung	226
6.3.5 Die g -adische Zahldarstellung	227
6.4 Die Erweiterung von den natürlichen zu den ganzen Zahlen	229
6.5 Die Erweiterung von den ganzen zu den rationalen Zahlen	230
6.6 Die Erweiterung von den rationalen zu den reellen Zahlen	234
6.6.1 Die Entdeckung der Irrationalität	234
6.6.2 Die Konstruktion von \mathbb{R}	238

6.6.3 Konstruktiver versus axiomatischer Aufbau der reellen Zahlen	241
6.7 Die Erweiterung von den reellen zu den komplexen Zahlen	242
6.8 Das <i>Cantor'sche</i> Diskontinuum und andere Fraktale	249
6.8.1 Das <i>Cantor'sche</i> Diskontinuum	249
6.8.2 Fraktale Dimension	253
6.8.3 „Zufallsfraktale“	257
Literaturverzeichnis	265
Stichwortverzeichnis	271