

# Inhalt

<b>I Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>1</b>
<b>1 Einführung in die Gewöhnlichen Differentialgleichungen</b>	<b>1</b>
1.1 Was ist eine Differentialgleichung?	1
1.1.1 Differentialgleichungen als Modelle für technisch-physikalische Problem	1
1.1.2 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung	9
1.2 Differentialgleichungen 1-ter Ordnung	11
1.2.1 Geometrische Interpretation. Folgerungen	11
1.2.2 Grundprobleme.	14
1.2.3 Existenz- und Eindeutigkeitssatz.	16
1.2.4 Anwendungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes.	25
1.2.5 Elementare Lösungsmethoden.	30
1.2.6 Numerische Behandlung.	45
1.2.7 Beispiele mit Mathematica	55
1.3 DGLn höherer Ordnung und Systeme 1-ter Ordnung	64
1.3.1 Existenz- und Eindeutigkeitssätze.	69
1.3.2 Abhängigkeit von Anfangsdaten und Parametern	71
1.3.3 Elementare Lösungsmethoden bei nichtlinearen Differentialgleichungen 2-ter Ordnung	75
1.4 Ebene autonome Systeme (Einführung).	93
1.4.1 Fortsetzbarkeit der Lösungen von Anfangswertproblemen	93
1.4.2 Phasenebene, Orbits und Gleichgewichtspunkte	99
1.4.3 Lineare autonome Systeme.	109
1.4.4 Ebene nichtlineare autonome Systeme	112
<b>2 Lineare Differentialgleichungen</b>	<b>125</b>
2.1 Lösungsverhalten.	126
2.1.1 Globale Existenz und Eindeutigkeit bei Systemen 1-ter Ordnung	127
2.1.2 Globale Existenz und Eindeutigkeit bei Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung	129
2.2 Homogene lineare Systeme 1-ter Ordnung.	130
2.2.1 Fundamentalsystem.	130
2.2.2 Wronski-Determinante.	133
2.3 Inhomogene lineare Systeme 1-ter Ordnung	135
2.3.1 Inhomogene Systeme und Superposition	135
2.3.2 Spezielle Lösungen und Variation der Konstanten	137
2.4 Lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung.	140
2.4.1 Fundamentalsystem und Wronski-Determinante	140
2.4.2 Reduktionsprinzip	143
2.4.3 Variation der Konstanten	146
2.5 Beispiele mit Mathematica	148

## VIII Inhalt

<b>3</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten</b>	<b>153</b>
3.1	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	154
3.1.1	Homogene Differentialgleichungen und Konstruktion eines Fundamentalsystems	154
3.1.2	Inhomogene Differentialgleichungen und Grundzüge der Operatorenmethode	161
3.1.3	Inhomogene Differentialgleichungen und Grundleungsverfahren	168
3.1.4	Anwendungen	171
3.2	Lineare Systeme 1-ter Ordnung	187
3.2.1	Eigenwerte und -vektoren bei symmetrischen Matrizen	187
3.2.2	Systeme mit symmetrischen Matrizen	188
3.2.3	Hauptvektoren. Jordansche Normalform.	191
3.2.4	Systeme mit beliebigen Matrizen.	193
3.2.5	Systeme und Matrix-Funktionen	199
3.2.6	Zurückführung auf Differentialgleichungen höherer Ordnung. Systeme höherer Ordnung	205
3.2.7	Anwendungen	207
3.3	Beispiele mit Mathematica	218
<b>4</b>	<b>Potenzreihenansätze und Anwendungen</b>	<b>225</b>
4.1	Potenzreihenansätze	225
4.1.1	Differentialgleichungen mit regulären Koeffizienten	225
4.1.2	Hermiteische Differentialgleichung.	229
4.2	Verallgemeinerte Potenzreihenansätze	234
4.2.1	Differentialgleichungen mit singulären Koeffizienten	234
4.2.2	Besselsche Differentialgleichung.	236
<b>5</b>	<b>Rand- und Eigenwertprobleme. Anwendungen</b>	<b>243</b>
5.1	Rand- und Eigenwertprobleme	245
5.1.1	Beispiele zur Orientierung	245
5.1.2	Randwertprobleme	247
5.1.3	Eigenwertprobleme.	248
5.2	Anwendung auf eine partielle Differentialgleichung	250
5.2.1	Die schwingende Saite	250
5.2.2	Physikalische Interpretation	255
5.3	Anwendung auf ein nichtlineares Problem (Stabknickung).	256
5.3.1	Aufgabenstellung.	257
5.3.2	Das linearisierte Problem	258
5.3.3	Das nichtlineare Problem. Verzweigungslösungen	260
<b>II</b>	<b>Distributionen.</b>	<b>266</b>
<b>6</b>	<b>Verallgemeinerung des klassischen Funktionsbegriffs.</b>	<b>266</b>
6.1	Motivierung und Definition	266
6.1.1	Einführende Betrachtungen.	266
6.1.2	Der Grundraum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	269
6.1.3	Distributionen (im weiteren Sinn)	273

6.2 Distributionen als Erweiterung der klassischen Funktionen. . . . .	275
6.2.1 Stetige Funktionen und Distributionen. . . . .	275
6.2.2 Die Diracsche Delta-Funktion . . . . .	276
<b>7 Rechnen mit Distributionen. Anwendungen . . . . .</b>	<b>279</b>
7.1 Rechnen mit Distributionen . . . . .	279
7.1.1 Grundoperationen. . . . .	279
7.1.2 Differentiation. Beispiele. . . . .	280
7.2 Anwendungen . . . . .	284
7.2.1 Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung. . . . .	284
7.2.2 Ein Differentialgleichungsproblem. . . . .	287
<b>III Integraltransformationen . . . . .</b>	<b>291</b>
<b>8 Fouriertransformation . . . . .</b>	<b>295</b>
8.1 Motivierung und Definition . . . . .	295
8.1.1 Einführende Betrachtungen. . . . .	295
8.1.2 Definition der Fouriertransformation. Beispiele . . . . .	301
8.2 Umkehrung der Fouriertransformation . . . . .	305
8.2.1 Umkehrsatz im Raum $\mathbb{S}$ . . . . .	305
8.2.2 Umkehrsatz für stückweise glatte Funktionen . . . . .	309
8.2.3 Eindeutigkeit der Umkehrung. . . . .	312
8.3 Eigenschaften der Fouriertransformation . . . . .	312
8.3.1 Linearität . . . . .	313
8.3.2 Verschiebungssatz . . . . .	313
8.3.3 Faltungsprodukt. . . . .	314
8.3.4 Differentiation . . . . .	317
8.3.5 Fouriertransformation und temperierte Distributionen . . . . .	320
8.3.6 Fouriertransformation kausaler Funktionen und Hilberttransformation . . . . .	322
8.4 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungsprobleme. . . . .	327
8.4.1 Wärmeleitungsgleichung . . . . .	327
8.4.2 Potentialgleichung . . . . .	330
8.5 Diskrete Fouriertransformation . . . . .	333
8.5.1 Diskrete Fouriertransformation DFT. . . . .	334
8.5.2 Schnelle Fouriertransformation FFT . . . . .	340
8.5.3 FFT und DFT mit Mathematica . . . . .	340
<b>9 Laplacetransformation . . . . .</b>	<b>345</b>
9.1 Motivierung und Definition . . . . .	345
9.1.1 Zusammenhang zur Fouriertransformation. . . . .	345
9.1.2 Definition der Laplacetransformation . . . . .	346
9.2 Umkehrung der Laplacetransformation . . . . .	349
9.2.1 Umkehrsatz und Identitätssatz . . . . .	349
9.2.2 Berechnung der Inversen . . . . .	351

## X Inhalt

9.3	Eigenschaften der Laplacetransformation . . . . .	353
9.3.1	Linearität . . . . .	353
9.3.2	Verschiebungssätze. Streckungssatz . . . . .	354
9.3.3	Faltungsprodukt. . . . .	355
9.3.4	Differentiation . . . . .	357
9.3.5	Integration . . . . .	360
9.3.6	Laplacetransformation und periodische Funktionen . . . . .	361
9.4	Anwendungen auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen . . . . .	366
9.4.1	Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	366
9.4.2	Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten . . . . .	370
9.4.3	Differentialgleichungen mit unstetigen Inhomogenitäten . . . . .	372
10	<b>3-Transformation.</b> . . . . .	376
10.1	Motivierung und Definition. . . . .	376
10.1.1	Einführende Betrachtungen . . . . .	376
10.1.2	$\mathcal{D}$ -Transformation und Zusammenhang zur Laplace-Transformation. . . . .	377
10.1.3	Definition der 3-Transformation. . . . .	380
10.2	Eigenschaften der 3-Transformation . . . . .	382
10.2.1	Grundlegende Operationen. Rechenregeln . . . . .	382
10.2.2	Umkehrung der 3-Transformation. . . . .	386
10.3	Anwendungen . . . . .	390
10.3.1	Lineare Differenzengleichungen . . . . .	390
10.3.2	Impulsgesteuerte Systeme. . . . .	394
	Anhang. . . . .	401
	Symbole . . . . .	421
	Literaturverzeichnis . . . . .	424
	Sachverzeichnis . . . . .	430

**Band I: Analysis (F. Wille)****1 Grundlagen**

- 1.1 Reelle Zahlen
- 1.2 Elementare Kombinatorik
- 1.3 Funktionen
- 1.4 Unendliche Folgen reeller Zahlen
- 1.5 Unendliche Reihen reeller Zahlen
- 1.6 Stetige Funktionen

**2 Elementare Funktionen**

- 2.1 Polynome
- 2.2 Rationale und algebraische Funktionen
- 2.3 Trigonometrische Funktionen
- 2.4 Exponentialfunktion, Logarithmus, Hyperbelfunktionen
- 2.5 Komplexe Zahlen

**3 Differentialrechnung einer reellen Variablen**

- 3.1 Grundlagen der Differentialrechnung
- 3.2 Ausbau der Differentialrechnung
- 3.3 Anwendungen

**4 Integralrechnung einer Variablen**

- 4.1 Grundlagen der Integralrechnung
- 4.2 Berechnung von Integralen
- 4.3 Uneigentliche Integrale
- 4.4 Anwendung: Wechselstromrechnung

**5 Folgen und Reihen von Funktionen**

- 5.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen
- 5.2 Potenzreihen
- 5.3 Fourier-Reihen

**6 Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler**

- 6.1 Der  $n$ -dimensionale Raum  $\mathbb{R}^n$
- 6.2 Abbildungen im  $\mathbb{R}^n$
- 6.3 Differenzierbare Abbildungen von mehreren Variablen
- 6.4 Gleichungssysteme, Extremalprobleme, Anwendungen

**7 Integralrechnung mehrerer reeller Variabler**

- 7.1 Integration bei zwei Variablen
- 7.2 Allgemeinfeld: Integration bei mehreren Variablen
- 7.3 Parameterabhängige Integrale

**Band II: Lineare Algebra (F. Wille, H. Haf, K. Burg)**

**1 Vektorrechnung in zwei und drei Dimensionen**

- 1.1 Vektoren in der Ebene
- 1.2 Vektoren im dreidimensionalen Raum

**2 Vektorräume beliebiger Dimensionen**

- 2.1 Die Vektorräume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$
- 2.2 Lineare Gleichungssysteme, Gauß'scher Algorithmus
- 2.3 Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper
- 2.4 Vektorräume über beliebigen Körpern

**3 Matrizen**

- 3.1 Definition, Addition, s-Multiplikation
- 3.2 Matrizenmultiplikation
- 3.3 Reguläre und inverse Matrizen
- 3.4 Determinanten
- 3.5 Spezielle Matrizen
- 3.6 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen
- 3.7 Eigenwerte und Eigenvektoren
- 3.8 Die Jordansche Normalform
- 3.9 Matrix-Funktionen
- 3.10 Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen

**4 Anwendungen**

- 4.1 Technische Strukturen
- 4.2 Roboter-Bewegung

**5 Lineare Ausgleichsprobleme**

- 5.1 Methode der kleinsten Fehlerquadrate
- 5.2 Generalisierte Inverse. Optimallösungen

**Band IV: Vektoranalysis und Funktionentheorie (H. Haf, F. Wille)**

**Vektoranalysis (F. Wille)**

**1 Kurven**

- 1.1 Wege, Kurven, Bogenlängen
- 1.2 Theorie ebener Kurven
- 1.3 Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte
- 1.4 Beispiele ebener Kurven II: Rollkurven, Blätter, Spiralen
- 1.5 Theorie räumlicher Kurven
- 1.6 Vektorfelder, Potentiale, Kurvenintegrale

**2 Flächen**

- 2.1 Flächenstücke und Flächen
- 2.2 Flächenintegrale

**3 Integralsätze**

- 3.1 Der Gaußsche Integralsatz
- 3.2 Der Stokessche Integralsatz
- 3.3 Weitere Differential- und Integralformeln
- 3.4 Wirbelfreiheit, Quelfreiheit, Potentiale

**4 Alternierende Differentialformen**

- 4.1 Alternierende Differentialformen im  $\mathbb{R}^3$
- 4.2 Alternierende Differentialformen im  $\mathbb{R}^n$

**5 Kartesische Tensoren**

- 5.1 Tensoralgebra
- 5.2 Tensoranalysis

**Funktionentheorie (H. Haf)****6 Grundlagen**

- 6.1 Komplexe Zahlen
- 6.2 Funktionen einer komplexen Variablen

**7 Holomorphe Funktionen**

- 7.1 Differenzierbarkeit im Komplexen, Holomorphie
- 7.2 Komplexe Integration
- 7.3 Erzeugung holomorpher Funktionen durch Grenzprozesse
- 7.4 Asymptotische Abschätzungen

**8 Isolierte Singularitäten, Laurententwicklung**

- 8.1 Laurentreihen
- 8.2 Residuensatz und Anwendungen

**9 Konforme Abbildungen**

- 9.1 Einführung in die Theorie konformer Abbildungen
- 9.2 Anwendungen auf die Potentialtheorie

**10 Anwendungen der Funktionentheorie auf die Besselsche Differentialgleichung**

- 10.1 Die Besselsche Differentialgleichung
- 10.2 Die Besselschen und Neumannschen Funktionen
- 10.3 Anwendungen

**Funktionalanalysis**

**1 Grundlegende Räume**

- 1.1 Metrische Räume
- 1.2 Normierte Räume. Banachräume
- 1.3 Skalarprodukträume. Hilberträume

**2 Lineare Operatoren in normierten Räumen**

- 2.1 Beschränkte lineare Operatoren
- 2.2 Fredholmsche Theorie in Skalarprodukträumen
- 2.3 Symmetrische vollstetige Operatoren

**3 Der Hilbertraum  $L_2(\Omega)$  und zugehörige Sobolevräume**

- 3.1 Der Hilbertraum  $L_2(\Omega)$
- 3.2 Sobolevräume

**Partielle Differentialgleichungen**

**4 Einführung**

- 4.1 Was ist eine partielle Differentialgleichung?
- 4.2 Lineare partielle Differentialgleichungen 1-ter Ordnung
- 4.3 Lineare partielle Differentialgleichungen 2-ter Ordnung

**5 Helmholtzsche Schwingungsgleichung und Potentialgleichung**

- 5.1 Grundlagen
- 5.2 Ganzraumprobleme
- 5.3 Randwertprobleme
- 5.4 Ein Eigenwertproblem der Potentialtheorie
- 5.5 Einführung in die Methode der finiten Elemente (F. Wille)

**6 Die Wärmeleitungsgleichung**

- 6.1 Rand- und Anfangswertprobleme
- 6.2 Ein Anfangswertproblem

**7 Die Wellengleichung**

- 7.1 Die homogene Wellengleichung
- 7.2 Die homogene Wellengleichung im  $\mathbb{R}^3$

**8 Hilbertraummethoden**

- 8.1 Einführung
- 8.2 Das schwache Dirichletproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen
- 8.3 Das schwache Neumannproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen
- 8.4 Zur Regularitätstheorie beim Dirichletproblem