

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Die Quaternionen und assoziierte Strukturen</b>	<b>9</b>
1.1 Die Quaternionen . . . . .	9
1.2 Die symplektische Ebene . . . . .	12
1.3 Die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$ . . . . .	14
1.4 Darstellungen der $SU(2)$ . . . . .	15
1.4.1 Charaktere . . . . .	16
1.4.2 Explizite Berechnung der irreduziblen Darstellungen . . . . .	18
1.4.3 Die Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung . . . . .	19
<b>2 Vektorfelder im euklidischen Raum</b>	<b>21</b>
2.1 Vektorfelder und komplexes Linienbündel . . . . .	21
2.2 $U(1)$ -Prinzipalbündel . . . . .	25
2.3 Erstes Beispiel: Ein konstantes Vektorfeld . . . . .	29
2.4 Zweites Beispiel: Ein rotationssymmetrisches Vektorfeld . . . . .	33
2.5 Verallgemeinerung des zweiten Beispiels . . . . .	40
<b>3 Erweiterung: Heisenberggruppen und -algebren</b>	<b>43</b>
3.1 Beispiel: Ein konstantes Vektorfeld . . . . .	44
3.2 Beispiel: Ein rotationssymmetrisches Vektorfeld . . . . .	48
3.3 Schrödingerdarstellung und Geodäten . . . . .	53
3.4 Die Schrödingerdarstellung in der Radartechnik . . . . .	54
3.5 EXKURS: Zur Einsteinschen Masse-Energie-Äquivalenz . . . . .	55
<b>4 Abstrakte Heisenberggruppen und -algebren</b>	<b>59</b>
4.1 Konjugierte Paare koadjungierter Orbits . . . . .	60
4.2 Die Bestimmungsstücke der Schrödingerdarstellung . . . . .	63
4.2.1 Konstruktion aus Darstellungen auf dem Zentrum der Heisenberggruppe . . . . .	63
4.2.2 Konstruktion über die Aufspaltung der Heisenberggruppe als semidirektes Produkt abelscher Gruppen . . . . .	66
4.2.3 Schrödingerdarstellungen und Informationsübertragung . . . . .	67
4.3 Bündel von Heisenberggruppen und Heisenbergalgebren . . . . .	68
4.4 Transformation der Schrödingerdarstellungen . . . . .	71
4.5 Die infinitesimale Schrödingerdarstellung . . . . .	72
4.6 Heisenberggruppen und die $SU(2)$ . . . . .	73
4.6.1 Bestimmung von $SU(2)$ durch die Heisenberggruppen . . . . .	73
4.6.2 Bestimmung der Heisenberggruppen durch die Gruppe $SU(2)$ . . . . .	77

<b>5</b>	<b>Spin <math>\frac{1}{2}</math>-Darstellungen</b>	<b>79</b>
5.1	Definitionen der Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung	79
5.1.1	Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellungen auf den Quaternionen	79
5.1.2	Verbindung zwischen Aufspaltungen der Quaternionen	83
5.1.3	Darstellungen von reskalierten 3-Sphären	83
5.2	Die Geometrie der $S^3$	84
5.2.1	Bestimmung der Hopf-Faserung durch die Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung	85
5.2.2	Blätterung der 3-Sphäre in 2-Tori	86
5.2.3	Blätterung der reskalierten 3-Sphäre	87
5.2.4	Großkreise auf $S^3$	89
5.2.5	Die 3-Sphäre und Großkreisbündel von Vektorfeldern	93
5.2.6	Das Torusbündel auf $S^3$	95
5.2.7	Zusammenfassung der verwendeten Bündelstrukturen	95
5.3	Die Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung und Schrödingerdarstellungen	98
5.3.1	Konstruktion der Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung aus den Schrödingerdarstellungen	99
5.3.2	Konstruktion von Schrödingerdarstellungen aus der Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung	99
5.3.3	Die Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung und Signale	101
5.3.4	Darstellungen der $SU(2)$ und Heisenberggruppen	102
5.4	Die infinitesimale Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung	104
5.4.1	Definition und Eigenschaften	104
5.4.2	Konstruktion der Heisenbergalgebren und der Heisenberggruppen aus der infinitesimalen Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung	105
5.4.3	Verbindung von infinitesimalen Schrödinger- und Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellungen	107
<b>6</b>	<b>Magnetresonanztomographie</b>	<b>109</b>
6.1	Grundzüge der Magnetresonanztomographie	109
6.1.1	Grundidee und Abgrenzung zur Computertomographie	109
6.1.2	Funktionsweise: Übersicht	110
6.1.3	Magnetisierung	110
6.1.4	Der Rotating Frame of Reference	113
6.1.5	Auslenkung	113
6.1.6	Relaxation	114
6.1.7	Ortskodierung	115
6.1.8	Die Bloch-Gleichung	118
6.1.9	HF-Impulse zur Schichtselektion	122
6.1.10	Signaldetektion und -aufbereitung	124
6.1.11	Bild-Rekonstruktion	125
6.1.12	Die Spin-Echo- und die Gradienten-Echo-Sequenz	126
6.2	Harmonische Analysis und Magnetresonanztomographie	127
6.3	Heisenbergalgebren und Magnetresonanztomographie	129
6.3.1	Magnetfelder und symplektische Strukturen	130
6.3.2	Magnetische Induktion und magnetische Feldstärke	131
6.3.3	Spinvektoren	132
6.3.4	Aufnahme-Schichten und Heisenbergalgebren	132
6.3.5	Phasen- und Frequenz-Kodierung	134

6.3.6	Variation der Schichtebene . . . . .	136
6.3.7	Die Rolle der Schrödingerdarstellungen . . . . .	136
6.3.8	Diskretisierung des Modells . . . . .	137
6.3.9	Spin-Echo-Sequenz, Gradienten-Echo-Sequenz und Verbindungen zur Schrödingerdarstellung . . . . .	138
6.3.10	EXKURS: Magnetfeld und magnetischer Monopol . . . . .	138
<b>Ausblick</b>		<b>141</b>
<b>A Äußeres Produkt und Hodge-*–Operator</b>		<b>143</b>
<b>B Heisenberggruppen in der Literatur</b>		<b>145</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>149</b>
<b>Stichwort- und Symbolverzeichnis</b>		<b>153</b>