

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Einleitung | 5 |
| 1 Die Quaternionen und assoziierte Strukturen | 9 |
| 1.1 Die Quaternionen | 9 |
| 1.2 Die symplektische Ebene | 12 |
| 1.3 Die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$ | 14 |
| 1.4 Darstellungen der $SU(2)$ | 15 |
| 1.4.1 Charaktere | 16 |
| 1.4.2 Explizite Berechnung der irreduziblen Darstellungen | 18 |
| 1.4.3 Die Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung | 19 |
| 2 Vektorfelder im euklidischen Raum | 21 |
| 2.1 Vektorfelder und komplexes Linienbündel | 21 |
| 2.2 $U(1)$ -Prinzipalbündel | 25 |
| 2.3 Erstes Beispiel: Ein konstantes Vektorfeld | 29 |
| 2.4 Zweites Beispiel: Ein rotationssymmetrisches Vektorfeld | 33 |
| 2.5 Verallgemeinerung des zweiten Beispiels | 40 |
| 3 Erweiterung: Heisenberggruppen und -algebren | 43 |
| 3.1 Beispiel: Ein konstantes Vektorfeld | 44 |
| 3.2 Beispiel: Ein rotationssymmetrisches Vektorfeld | 48 |
| 3.3 Schrödingerdarstellung und Geodäten | 53 |
| 3.4 Die Schrödingerdarstellung in der Radartechnik | 54 |
| 3.5 EXKURS: Zur Einsteinschen Masse-Energie-Äquivalenz | 55 |
| 4 Abstrakte Heisenberggruppen und -algebren | 59 |
| 4.1 Konjugierte Paare koadjungierter Orbits | 60 |
| 4.2 Die Bestimmungsstücke der Schrödingerdarstellung | 63 |
| 4.2.1 Konstruktion aus Darstellungen auf dem Zentrum der Heisenberggruppe | 63 |
| 4.2.2 Konstruktion über die Aufspaltung der Heisenberggruppe als semidirektes Produkt abelscher Gruppen | 66 |
| 4.2.3 Schrödingerdarstellungen und Informationsübertragung | 67 |
| 4.3 Bündel von Heisenberggruppen und Heisenbergalgebren | 68 |
| 4.4 Transformation der Schrödingerdarstellungen | 71 |
| 4.5 Die infinitesimale Schrödingerdarstellung | 72 |
| 4.6 Heisenberggruppen und die $SU(2)$ | 73 |
| 4.6.1 Bestimmung von $SU(2)$ durch die Heisenberggruppen | 73 |
| 4.6.2 Bestimmung der Heisenberggruppen durch die Gruppe $SU(2)$ | 77 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Spin $\frac{1}{2}$-Darstellungen | 79 |
| 5.1 | Definitionen der Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung | 79 |
| 5.1.1 | Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellungen auf den Quaternionen | 79 |
| 5.1.2 | Verbindung zwischen Aufspaltungen der Quaternionen | 83 |
| 5.1.3 | Darstellungen von reskalierten 3-Sphären | 83 |
| 5.2 | Die Geometrie der S^3 | 84 |
| 5.2.1 | Bestimmung der Hopf-Faserung durch die Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung | 85 |
| 5.2.2 | Blätterung der 3-Sphäre in 2-Tori | 86 |
| 5.2.3 | Blätterung der reskalierten 3-Sphäre | 87 |
| 5.2.4 | Großkreise auf S^3 | 89 |
| 5.2.5 | Die 3-Sphäre und Großkreisbündel von Vektorfeldern | 93 |
| 5.2.6 | Das Torusbündel auf S^3 | 95 |
| 5.2.7 | Zusammenfassung der verwendeten Bündelstrukturen | 95 |
| 5.3 | Die Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung und Schrödingerdarstellungen | 98 |
| 5.3.1 | Konstruktion der Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung aus den Schrödingerdarstellungen | 99 |
| 5.3.2 | Konstruktion von Schrödingerdarstellungen aus der Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung | 99 |
| 5.3.3 | Die Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung und Signale | 101 |
| 5.3.4 | Darstellungen der $SU(2)$ und Heisenberggruppen | 102 |
| 5.4 | Die infinitesimale Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung | 104 |
| 5.4.1 | Definition und Eigenschaften | 104 |
| 5.4.2 | Konstruktion der Heisenbergalgebren und der Heisenberggruppen aus der infinitesimalen Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung | 105 |
| 5.4.3 | Verbindung von infinitesimalen Schrödinger- und Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellungen | 107 |
| 6 | Magnetresonanztomographie | 109 |
| 6.1 | Grundzüge der Magnetresonanztomographie | 109 |
| 6.1.1 | Grundidee und Abgrenzung zur Computertomographie | 109 |
| 6.1.2 | Funktionsweise: Übersicht | 110 |
| 6.1.3 | Magnetisierung | 110 |
| 6.1.4 | Der Rotating Frame of Reference | 113 |
| 6.1.5 | Auslenkung | 113 |
| 6.1.6 | Relaxation | 114 |
| 6.1.7 | Ortskodierung | 115 |
| 6.1.8 | Die Bloch-Gleichung | 118 |
| 6.1.9 | HF-Impulse zur Schichtselektion | 122 |
| 6.1.10 | Signaldetektion und -aufbereitung | 124 |
| 6.1.11 | Bild-Rekonstruktion | 125 |
| 6.1.12 | Die Spin-Echo- und die Gradienten-Echo-Sequenz | 126 |
| 6.2 | Harmonische Analysis und Magnetresonanztomographie | 127 |
| 6.3 | Heisenbergalgebren und Magnetresonanztomographie | 129 |
| 6.3.1 | Magnetfelder und symplektische Strukturen | 130 |
| 6.3.2 | Magnetische Induktion und magnetische Feldstärke | 131 |
| 6.3.3 | Spinvektoren | 132 |
| 6.3.4 | Aufnahme-Schichten und Heisenbergalgebren | 132 |
| 6.3.5 | Phasen- und Frequenz-Kodierung | 134 |

| | | |
|---|---|------------|
| 6.3.6 | Variation der Schichtebene | 136 |
| 6.3.7 | Die Rolle der Schrödingerdarstellungen | 136 |
| 6.3.8 | Diskretisierung des Modells | 137 |
| 6.3.9 | Spin–Echo–Sequenz, Gradienten–Echo–Sequenz und Verbindungen zur Schrödingerdarstellung | 138 |
| 6.3.10 | EXKURS: Magnetfeld und magnetischer Monopol | 138 |
| Ausblick | | 141 |
| A Äußeres Produkt und Hodge-*–Operator | | 143 |
| B Heisenberggruppen in der Literatur | | 145 |
| Literaturverzeichnis | | 149 |
| Stichwort– und Symbolverzeichnis | | 153 |