

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra	12
1.1 Vektorrechnung	12
1.1.1 Grundlagen	12
1.1.2 Lineare Abhängigkeit	18
1.1.3 Vektorräume	22
1.1.4 Dimension und Basis	24
1.2 Matrizen	26
1.2.1 Definition einer Matrix	26
1.2.2 Elementare Rechenregeln für Matrizen	28
1.2.2.1 Addition von Matrizen	28
1.2.2.2 Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl	29
1.2.2.3 Transposition von Matrizen	29
1.2.3 Multiplikation von Matrizen mit Matrizen	31
1.2.3.1 Grundlagen	31
1.2.3.2 Inhaltliche Interpretation von Matrizenprodukten	34
1.2.3.3 Einheitsmatrizen und Grundlagen zu inversen Matrizen	40
1.2.3.4 Übungsaufgaben zur Matrizenmultiplikation	44
1.3 Lineare Gleichungssysteme	45
1.3.1 Strukturiertes Additionsverfahren	45
1.3.2 Der Gauß-Algorithmus	48
1.3.3 Mehrdeutige Lösungen	52
1.3.4 Schema für den Gauß-Algorithmus	55
1.3.5 Umgehen von Brüchen	57
1.3.6 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	59
1.3.7 Weitere Zusammenhänge	61
1.4 Determinanten, Rang und Inverse	63
1.4.1 Determinanten	63
1.4.1.1 Grundlagen	63
1.4.1.2 Der Laplace Entwicklungssatz	66
1.4.1.3 Der Zahlenwert einer Determinante	69
1.4.1.4 Rechenregeln für Determinanten	70
1.4.2 Rang einer Matrix	72

1.4.3	Inverse Matrizen	75
1.4.3.1	Grundlagen	75
1.4.3.2	Existenz der inversen Matrix	76
1.4.3.3	Bestimmung der Inversen mittels der adjungierten Matrix	77
1.4.3.4	Bestimmung der Inversen mittels des Gauß-Algorithmus	80
1.4.3.5	Einige spezielle inverse Matrizen	82
1.4.4	Übungsaufgaben	83
1.4.5	Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme	88
1.4.5.1	Mehrdeutige Lösungen und Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	88
1.4.5.2	Die Cramersche Regel	90
1.5	Formales Rechnen mit Matrizen	92
1.5.1	Grundlagen	92
1.5.2	Übungsaufgaben	98
1.6	Konkrete Überprüfung auf lineare Abhängigkeit	99
1.6.1	Grundlagen	99
1.6.2	Übungsaufgaben	103
1.7	Überprüfung auf Vektorraumeigenschaften	107
1.7.1	Grundlagen	107
1.7.2	Unterräume	111
1.7.3	Bestimmung von Dimension und Basis des Vektorraumes	115
1.8	Lineare Optimierung	117
1.8.1	Grundlagen	117
1.8.2	Graphische Lösung	119
1.8.3	Spezifizierung der Optimierungsprobleme	127
1.8.4	Simplex Algorithmus	130
1.8.5	Schema zum Simplex Algorithmus	140

2 Folgen und Reihen	142
2.1 Grundlagen	142
2.2 Grenzwerte von Folgen	146
3 Funktionen	149
3.1 Begriff der Funktion	149
3.2 Ganzrationale Funktionen	151
3.3 Nullstellen von Funktionen	152
3.4 Gebrochenrationale Funktionen	154
3.5 Wurzelfunktionen	155
3.6 Umkehrfunktionen	157
3.7 Exponentialfunktion und Logarithmus	159
3.7.1 Exponentialfunktionen	159
3.7.2 Darstellung des Taschenrechners für sehr große und sehr kleine Zahlen	161
3.7.3 Rechenregeln für Exponenten	161
3.7.4 Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion	162
3.7.5 Rechenregeln für Logarithmen	164
3.8 Trigonometrische Funktionen	165
3.8.1 Die Sinusfunktion	165
3.8.2 Winkelmaße – Bogenmaß (rad) und Gradmaß (deg)	166
3.8.3 Cosinus und Tangens	166
3.8.4 Trigonometrische Umkehrfunktionen	166
3.9 Grenzwerte von Funktionen	167
3.9.1 Grenzwerte für x gegen unendlich	167
3.9.2 Grenzwerte gegen eine reelle Zahl	168
3.9.3 Regel von de l' Hospital	174
3.9.4 Schema zur Regel von de l' Hospital	176
3.9.5 Übungsaufgaben	178
3.10 Stetige und unstetige Funktionen	180

4 Differentialrechnung einer Veränderlichen	183
4.1 Einführung	183
4.2 Steigung einer Funktion	184
4.2.1 Steigung einer Geraden	184
4.2.2 Steigung von Sekante und Tangente	185
4.2.3 Bestimmung der Steigung einer Funktion	187
4.2.4 Differenzierbarkeit	190
4.3 Ableitungen verschiedener Funktionen	192
4.3.1 Ableitung für Potenzen von x	192
4.3.2 Ableitungen mit Faktoren	194
4.3.3 Ableitungen für Sinus- und Cosinusfunktionen	195
4.3.4 Ableitungen von Exponentialfunktionen	195
4.3.5 Ableitung von Umkehrfunktionen	196
4.4 Ableitungen von verknüpften Funktionen	199
4.4.1 Ableitungen von Summen und Differenzen	199
4.4.2 Kettenregel	200
4.4.3 Produktregel	203
4.4.4 Quotientenregel	205
4.5 Ableitungsübersicht	206
4.6 Ableitungsübungen	207
4.7 Bestimmung von Extremwerten	210
4.7.1 Einführung	210
4.7.2 Bestimmung von Hoch-, Tief- und Sattelpunkten	210
4.7.2.1 Notwendige Bedingung	210
4.7.2.2 Hinreichende Bedingung für Hoch- und Tiefpunkte	212
4.7.3 Randextrema und Klassifizierung von Extrema	216
4.7.4 Besonderheiten bei unstetigen Funktionen	218
4.7.5 Besonderheiten bei streng monotonen Funktionen	220
4.7.6 Schema für die Bestimmung und Klassifizierung von Extremstellen	222
4.7.7 Übungsaufgaben	224
4.8 Wendepunkte	228

4.9 Weitere Zusammenhänge	230
4.9.1 Monotonie	230
4.9.2 Konkave und konvexe Funktionen	231
4.9.3 Newton-Verfahren	233
4.9.3.1 Grundlagen	233
4.9.3.2 Berechnung von Nullstellen	235
4.9.3.3 Konvergenz des Newton-Verfahrens	238
4.9.4 Mittelwertsatz	240
4.9.5 Elastizitäten	241

5 Integralrechnung 246

5.1 Grundlagen	246
5.2 Berechnung von Integralen	249
5.3 Bestimmtes Integral	250
5.4 Flächenberechnung	252
5.5 Bestimmung von einfachen Integralen	254
5.5.1 Einfache Stammfunktionen	254
5.5.2 Integrale von Funktionen, die addiert oder mit Konstanten multipliziert werden	256
5.5.3 Einfache verkettete Funktionen	257
5.6 Komplexere Integrationsmethoden	258
5.6.1 Substitutionsregel	258
5.6.1.1 Grundlagen	258
5.6.1.2 Substitution als Umkehrung der Kettenregel	260
5.6.1.3 Substitution zur Umformung des Integrals	262
5.6.1.4 Substitution bei bestimmten Integralen	264
5.6.1.5 Schema zur Integration mittels Substitution	266
5.6.2 Partielle Integration	267
5.7 Tabelle wichtiger Stammfunktionen	269
5.8 Integralfunktionen	272
5.9 Uneigentliche Integrale	273
5.10 Berechnung von Summen mittels Integralen	276
5.11 Übungsaufgaben	277

6	Differential- und Differenzengleichungen	280
6.1	Differentialgleichungen	280
6.1.1	Ökonomischer Bezug	280
6.1.2	Einteilungen von Differentialgleichungen	281
6.1.3	Trennung der Variablen	282
6.1.4	Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	285
6.1.4.1	Homogene lineare Differentialgleichung	286
6.1.4.2	Inhomogene lineare Differentialgleichung	287
6.1.5	Aufgaben zu Differentialgleichungen	289
6.2	Differenzengleichungen	291
7	Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher	294
7.1	Grundlagen	294
7.2	Partielle Ableitungen	297
7.2.1	Grundlagen	297
7.2.2	Der Gradient einer Funktion	299
7.2.3	Übungen zu partiellen Ableitungen	300
7.3	Extremwerte von Funktionen mit mehreren Variablen	303
7.4	Lagrangetechnik	308
7.4.1	Grundlagen	308
7.4.2	Hinreichende Bedingung	312
7.4.3	Beispielaufgaben	313
7.4.3.1	Funktionen mit mehreren Nebenbedingungen	313
7.4.3.2	Verknüpfte Funktionen	315
7.4.3.3	Minimalkostenkombination	317
7.5	Totales Differential	319
7.6	Abbildungen in den \mathbb{R}^n	323
7.6.1	Ableitungsmatrizen	323
7.6.2	Mehrdimensionale Kettenregel	324
7.6.3	Aufgaben zur mehrdimensionalen Kettenregel	324
8	Finanzmathematik	327
8.1	Grundlagen	327
8.2	Auf- und Abzinsen	327
8.3	Konstante Zahlungsströme (Renten)	330
8.4	Vorschüssige Zinszahlungen	332

9 Anhang	333
9.1 Lösungen von Gleichungen	333
9.1.1 Lineare Gleichungen	333
9.1.2 Quadratische Gleichungen	334
9.1.2.1 Quadratische Ergänzung	334
9.1.2.2 pq-Formel	335
9.1.2.3 Weitere Zusammenhänge	336
9.1.3 Homogene Gleichungen höherer Ordnung	337
9.1.4 Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung	337
9.1.5 Gleichungen mit Quotienten	339
9.1.6 Nicht lineare Gleichungssysteme	339
9.1.7 Ungleichungen	340
9.2 Bruchrechnen	343
9.3 Grundlegende Rechenregeln	346
9.3.1 Wurzeln und Potenzen	346
9.3.2 Multiplizieren von Klammern	346
9.4 Typische Fehler	348
9.5 Formeln	350
9.5.1 Rechenregeln für Matrizen	350
9.5.2 Rechenregeln für Determinanten	350
9.5.3 Rechenregeln für den Rang	351
9.5.4 Inverse Matrizen	352
9.5.5 Begriffe zu Matrizen	352
9.5.6 Lineare Gleichungssysteme	353
9.5.7 Bruchrechnen	354
9.5.8 Rechnen mit Exponenten	354
9.5.9 Logarithmen	355
9.5.10 Wichtige Identitäten	355
9.5.11 Ableitungsregeln	355
9.5.12 Ableitungsübersicht	356
9.5.13 Integrationsregeln	356
9.5.14 Tabelle wichtiger Stammfunktionen	357
9.6 Mathematische Zeichen	358
9.7 Griechisches Alphabet	360
Stichwortverzeichnis	362