

Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen	1
1 Einige grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	3
2 Die Menge der reellen Zahlen	6
2.1 Darstellung der reellen Zahlen und ihrer Eigenschaften	6
2.2 Anordnung der Zahlen, Ungleichung, Betrag	7
2.3 Teilmengen und Intervalle	8
3 Gleichungen	9
3.1 Lineare Gleichungen	10
3.2 Quadratische Gleichungen	10
3.3 Gleichungen 3. und höheren Grades	11
3.3.1 Allgemeine Vorbetrachtung	11
3.3.2 Kubische Gleichungen vom speziellen Typ $ax^3 + bx^2 + cx = 0$	12
3.3.3 Bi-quadratische Gleichungen	12
3.4 Wurzelgleichungen	13
3.5 Betragsgleichungen	14
3.5.1 Definition der Betragsfunktion	15
3.5.2 Analytische Lösung einer Betragsgleichung durch Fallunterscheidung (Beispiel)	17
3.5.3 Lösung einer Betragsgleichung auf halb-graphischem Wege (Beispiel)	18
4 Ungleichungen	18
5 Lineare Gleichungssysteme	21
5.1 Ein einführendes Beispiel	21
5.2 Der Gaußsche Algorithmus	24
5.3 Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes	33
6 Der Binomische Lehrsatz	35

Übungsaufgaben	39
Zu Abschnitt 1 und 2	39
Zu Abschnitt 3	39
Zu Abschnitt 4	40
Zu Abschnitt 5	41
Zu Abschnitt 6	42
II Vektoralgebra	43
1 Grundbegriffe	43
1.1 Definition eines Vektors	43
1.2 Gleichheit von Vektoren	44
1.3 Parallele, anti-parallele und kollineare Vektoren	45
1.4 Vektoroperationen	46
1.4.1 Addition von Vektoren	46
1.4.2 Subtraktion von Vektoren	49
1.4.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	50
2 Vektorrechnung in der Ebene	52
2.1 Komponentendarstellung eines Vektors	52
2.2 Darstellung der Vektoroperationen	56
2.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	56
2.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren	57
2.3 Skalarprodukt zweier Vektoren	59
2.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes	59
2.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren	62
2.4 Anwendungsbeispiel: Resultierende eines ebenen Kräftesystems	65
3 Vektorrechnung im 3-dimensionalen Raum	67
3.1 Komponentendarstellung eines Vektors	68
3.2 Darstellung der Vektoroperationen	72
3.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	72
3.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren	73
3.3 Skalarprodukt zweier Vektoren	76
3.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes	76
3.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren	79
3.3.3 Richtungswinkel eines Vektors	80
3.3.4 Projektion eines Vektors auf einen zweiten Vektor	82
3.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Arbeit einer Kraft	84
3.4 Vektorprodukt zweier Vektoren	86
3.4.1 Definition und Berechnung eines Vektorproduktes	86
3.4.2 Anwendungsbeispiele	92

3.4.2.1 Drehmoment (Moment einer Kraft)	92
3.4.2.2 Bewegung von Ladungsträgern in einem Magnetfeld (Lorentz-Kraft)	93
3.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt)	94
4 Anwendungen in der Geometrie	98
4.1 Vektorielle Darstellung einer Geraden	98
4.1.1 Punkt-Richtungs-Form einer Geraden	98
4.1.2 Zwei-Punkte-Form einer Geraden	100
4.1.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden	101
4.1.4 Abstand zweier paralleler Geraden	103
4.1.5 Abstand zweier windschiefer Geraden	105
4.1.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	107
4.2 Vektorielle Darstellung einer Ebene	109
4.2.1 Punkt-Richtungs-Form einer Ebene	109
4.2.2 Drei-Punkte-Form einer Ebene	112
4.2.3 Gleichung einer Ebene senkrecht zu einem Vektor	114
4.2.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene	115
4.2.5 Abstand einer Geraden von einer Ebene	117
4.2.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	119
4.2.7 Abstand zweier paralleler Ebenen	122
4.2.8 Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen	124
Übungsaufgaben	128
Zu Abschnitt 2 und 3	128
Zu Abschnitt 4	132
 III Funktionen und Kurven	 137
1 Definition und Darstellung einer Funktion	137
1.1 Definition einer Funktion	137
1.2 Darstellungsformen einer Funktion	138
1.2.1 Analytische Darstellung	138
1.2.2 Darstellung durch eine Wertetabelle (Funktionstafel)	138
1.2.3 Graphische Darstellung	138
1.2.4 Parameterdarstellung einer Funktion	140
2 Allgemeine Funktionseigenschaften	141
2.1 Nullstellen	141
2.2 Symmetrieverhalten	142
2.3 Monotonie	144
2.4 Periodizität	147
2.5 Umkehrfunktion oder inverse Funktion	148

3 Koordinatentransformationen	152
3.1 Ein einführendes Beispiel	152
3.2 Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems.....	153
3.3 Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten.....	158
3.3.1 Definition der Polarkoordinaten.....	158
3.3.2 Darstellung einer Kurve in Polarkoordinaten	161
4 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	163
4.1 Reelle Zahlenfolgen	163
4.1.1 Definition und Darstellung einer reellen Zahlenfolge	163
4.1.2 Grenzwert einer Folge	165
4.2 Grenzwert einer Funktion	168
4.2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$	168
4.2.2 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$	171
4.2.3 Rechenregeln für Grenzwerte.....	173
4.3 Stetigkeit einer Funktion	174
5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)	179
5.1 Definition einer ganzrationalen Funktion.....	179
5.2 Konstante und lineare Funktionen.....	180
5.3 Quadratische Funktionen.....	183
5.4 Polynomfunktionen höheren Grades	187
5.5 Horner-Schema und Nullstellenberechnung einer Polynomfunktion.....	191
5.6 Interpolationspolynome	195
5.6.1 Allgemeine Vorbetrachtung.....	195
5.6.2 Interpolationspolynom von Newton.....	196
5.7 Ein Anwendungsbeispiel: Biegelinie eines Balkens	200
6 Gebrochenrationale Funktionen	200
6.1 Definition einer gebrochenrationalen Funktion.....	200
6.2 Nullstellen, Definitionslücken, Pole	201
6.3 Asymptotisches Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen	206
6.4 Ein Anwendungsbeispiel: Kapazität eines Kugelkondensators.....	208
7 Potenz- und Wurzelfunktionen	209
7.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten.....	209
7.2 Wurzelfunktionen.....	211
7.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	213
7.4 Ein Anwendungsbeispiel: Beschleunigung eines Elektrons in einem elektrischen Feld	215

8 Algebraische Funktionen	215
8.1 Definition einer algebraischen Funktion	215
8.2 Gleichungen der Kegelschnitte	217
8.2.1 Darstellung eines Kegelschnitts durch eine algebraische Gleichung 2. Grades mit konstanten Koeffizienten	217
8.2.2 Gleichungen eines Kreises	218
8.2.3 Gleichungen einer Ellipse	219
8.2.4 Gleichungen einer Hyperbel	221
8.2.5 Gleichungen einer Parabel	224
8.2.6 Beispiele zu den Kegelschnitten	225
8.3 Ein Anwendungsbeispiel: Erzwungene Schwingung eines mechanischen Systems	230
9 Trigonometrische Funktionen	231
9.1 Definitionen und Grundbegriffe	231
9.2 Sinus- und Kosinusfunktion	236
9.3 Tangens- und Kotangensfunktion	237
9.4 Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	238
9.5 Anwendungen in der Schwingungslehre	240
9.5.1 Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	240
9.5.1.1 Die allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	240
9.5.1.2 Harmonische Schwingung eines Federpendels (Feder-Masse-Schwingers)	244
9.5.2 Darstellung von Schwingungen im Zeigerdiagramm	246
9.5.3 Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter Schwingungen	252
9.5.4 Lissajous-Figuren	257
10 Arkusfunktionen	258
10.1 Das Problem der Umkehrung trigonometrischer Funktionen	258
10.2 Arkussinusfunktion	259
10.3 Arkuskosinusfunktion	260
10.4 Arkustanges- und Arkuskotangensfunktion	261
10.5 Trigonometrische Gleichungen	265
11 Exponentialfunktionen	267
11.1 Grundbegriffe	267
11.2 Definition und Eigenschaften einer Exponentialfunktion	267
11.3 Spezielle, in den Anwendungen häufig auftretende Funktionstypen	269
11.3.1 Abklingfunktionen	269
11.3.2 Sättigungsfunktionen	273
11.3.3 Darstellung aperiodischer Schwingungsvorgänge durch e-Funktionen	275
11.3.4 Gauß-Funktionen	277

12 Logarithmusfunktionen	278
12.1 Grundbegriffe	278
12.2 Definition und Eigenschaften einer Logarithmusfunktion	280
12.3 Exponential- und Logarithmusgleichungen	284
13 Hyperbel- und Areafunktionen	286
13.1 Hyperbelfunktionen	286
13.1.1 Definition der Hyperbelfunktionen	286
13.1.2 Die Hyperbelfunktionen $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$	286
13.1.3 Die Hyperbelfunktionen $y = \tanh x$ und $y = \coth x$	288
13.1.4 Wichtige Beziehungen zwischen den hyperbolischen Funktionen	289
13.2 Areafunktionen	290
13.2.1 Definition der Areafunktionen	290
13.2.2 Die Areafunktionen $y = \text{arsinh } x$ und $y = \text{arcosh } x$	291
13.2.3 Die Areafunktionen $y = \text{artanh } x$ und $y = \text{arcoth } x$	292
13.2.4 Darstellung der Areafunktionen durch Logarithmusfunktionen ..	293
13.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	293
Übungsaufgaben	295
Zu Abschnitt 1	295
Zu Abschnitt 2	296
Zu Abschnitt 3	296
Zu Abschnitt 4	297
Zu Abschnitt 5	299
Zu Abschnitt 6	301
Zu Abschnitt 7	301
Zu Abschnitt 8	302
Zu Abschnitt 9 und 10	302
Zu Abschnitt 11, 12 und 13	305
IV Differentialrechnung	308
1 Differenzierbarkeit einer Funktion	308
1.1 Das Tangentenproblem	308
1.2 Ableitung einer Funktion	309
1.3 Ableitung der elementaren Funktionen	313
2 Ableitungsregeln	316
2.1 Faktorregel	316
2.2 Summenregel	317
2.3 Produktregel	318

2.4	Quotientenregel	320
2.5	Kettenregel	322
2.6	Logarithmische Ableitung.....	327
2.7	Ableitung der Umkehrfunktion.....	328
2.8	Implizite Differentiation	330
2.9	Differential einer Funktion.....	332
2.10	Höhere Ableitungen	335
2.11	Ableitung einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve) ..	336
2.12	Anstieg einer in Polarkoordinaten dargestellten Kurve	339
2.13	Einfache Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	344
2.13.1	Bewegung eines Massenpunktes (Geschwindigkeit, Beschleunigung)	344
2.13.2	Induktionsgesetz.....	346
2.13.3	Elektrischer Schwingkreis.....	347
3	Anwendungen der Differentialgleichung.....	348
3.1	Tangente und Normale	348
3.2	Linearisierung einer Funktion	350
3.3	Charakteristische Kurvenpunkte	353
3.3.1	Geometrische Vorbetrachtungen.....	353
3.3.2	Krümmung einer ebenen Kurve	355
3.3.3	Relative oder lokale Extremwerte	363
3.3.4	Wendepunkte, Sattelpunkte	368
3.3.5	Ergänzungen	370
3.4	Extremwertaufgaben	372
3.5	Kurvendiskussion	378
3.6	Näherungsweise Lösung einer Gleichung nach dem Tangentenverfahren von Newton	383
3.6.1	Iterationsverfahren.....	383
3.6.2	Tangentenverfahren von Newton	384
Übungsaufgaben	391	
Zu Abschnitt 1	391	
Zu Abschnitt 2	391	
Zu Abschnitt 3	395	
V Integralrechnung.....	398	
1 Integration als Umkehrung der Differentiation.....	398	
2 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt	401	
2.1	Ein einführendes Beispiel.....	402
2.2	Das bestimmte Integral	405

3 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion	411
4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	414
5 Grund- oder Stammintegrale	418
6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion ..	420
7 Elementare Integrationsregeln	424
8 Integrationsmethoden	427
8.1 Integration durch Substitution.....	427
8.1.1 Ein einführendes Beispiel	427
8.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen	428
8.2 Partielle Integration oder Produktintegration	434
8.3 Integration einer echt gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden	440
8.3.1 Partialbruchzerlegung	441
8.3.2 Integration der Partialbrüche	443
8.4 Numerische Integrationsmethoden.....	447
8.4.1 Trapezformel.....	448
8.4.2 Simpsonsche Formel	453
9 Uneigentliche Integrale	459
10 Anwendungen der Integralrechnung	464
10.1 Einfache Beispiele aus Physik und Technik	464
10.1.1 Integration der Bewegungsgleichung.....	464
10.1.2 Biegelinie (elastische Linie) eines einseitig eingespannten Balkens	467
10.1.3 Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes	469
10.2 Flächeninhalt.....	470
10.2.1 Bestimmtes Integral und Flächeninhalt. Ergänzungen.....	470
10.2.2 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven	476
10.3 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen).....	481
10.4 Bogenlänge einer ebenen Kurve.....	487
10.5 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	490
10.6 Arbeits- und Energiegrößen	494
10.7 Lineare und quadratische Mittelwerte.....	500
10.8 Schwerpunkt homogener Flächen und Körper	504
10.8.1 Grundbegriffe.....	504
10.8.2 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	507
10.8.3 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	513
10.9 Massenträgheitsmomente	518
10.9.1 Grundbegriffe und einfache Beispiele.....	518
10.9.2 Satz von Steiner	522
10.9.3 Massenträgheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers	523

Übungsaufgaben	528
Zu Abschnitt 1 bis 7	528
Zu Abschnitt 8	531
Zu Abschnitt 9	534
Zu Abschnitt 10	534
VI Potenzreihenentwicklungen	539
1 Unendliche Reihen	539
1.1 Ein einführendes Beispiel	539
1.2 Grundbegriffe	541
1.2.1 Definition einer unendlichen Reihe	541
1.2.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	543
1.3 Konvergenzkriterien	546
1.3.1 Quotientenkriterium	547
1.3.2 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	550
2 Potenzreihen	552
2.1 Definition einer Potenzreihe	552
2.2 Konvergenzverhalten einer Potenzreihe	553
2.3 Eigenschaften der Potenzreihen	559
3 Taylor-Reihen	560
3.1 Ein einführendes Beispiel	560
3.2 Potenzreihenentwicklung einer Funktion	562
3.2.1 Mac Laurinsche Reihe	562
3.2.2 Taylorsche Reihe	569
3.2.3 Tabellarische Zusammenstellung wichtiger Potenzreihen- entwicklungen	571
3.3 Anwendungen	573
3.3.1 Näherungspolynome einer Funktion	573
3.3.2 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	584
3.3.3 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital	587
3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	593
Übungsaufgaben	596
Zu Abschnitt 1	596
Zu Abschnitt 2	597
Zu Abschnitt 3	597

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben	602
I Allgemeine Grundlagen	602
Abschnitt 1 und 2	602
Abschnitt 3	602
Abschnitt 4	604
Abschnitt 5	606
Abschnitt 6	607
II Vektoralgebra	608
Abschnitt 2 und 3	608
Abschnitt 4	611
III Funktionen und Kurven	618
Abschnitt 1	618
Abschnitt 2	620
Abschnitt 3	620
Abschnitt 4	621
Abschnitt 5	623
Abschnitt 6	625
Abschnitt 7	627
Abschnitt 8	627
Abschnitt 9 und 10	628
Abschnitt 11, 12 und 13	631
IV Differentialrechnung	633
Abschnitt 1	633
Abschnitt 2	633
Abschnitt 3	640
V Integralrechnung	650
Abschnitt 1 bis 7	650
Abschnitt 8	651
Abschnitt 9	654
Abschnitt 10	655
VI Potenzreihenentwicklungen	659
Abschnitt 1	659
Abschnitt 2	660
Abschnitt 3	661
Literaturhinweise	669
Sachwortverzeichnis	670

Inhaltsübersicht Band 2

Kapitel I: Lineare Algebra

- 1 Reelle Matrizen
- 2 Determinanten
- 3 Ergänzungen
- 4 Lineare Gleichungssysteme
- 5 Komplexe Matrizen
- 6 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

Kapitel II: Fourier-Reihen

- 1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion
- 2 Anwendungen

Kapitel III: Komplexe Zahlen und Funktionen

- 1 Definition und Darstellung einer komplexen Zahl
- 2 Komplexe Rechnung
- 3 Anwendungen der komplexen Rechnung
- 4 Ortskurven

Kapitel IV: Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

- 1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung
- 2 Partielle Differentiation
- 3 Mehrfachintegrale

Kapitel V: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- 1 Grundbegriffe
- 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung
- 3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 4 Anwendungen in der Schwingungslehre
- 5 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 6 Numerische Integration einer Differentialgleichung
- 7 Systeme linearer Differentialgleichungen

Kapitel VI: Laplace-Transformation

- 1 Grundbegriffe
- 2 Allgemeine Eigenschaften der Laplace-Transformation
- 3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion
- 4 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich
- 5 Anwendungen der Laplace-Transformation

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben

Inhaltsübersicht Band 3

Kapitel I: Vektoranalysis

- 1 Ebene und räumliche Kurven
- 2 Flächen im Raum
- 3 Skalar- und Vektorfelder
- 4 Gradient eines Skalarfeldes
- 5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes
- 6 Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme
- 7 Linien- oder Kurvenintegrale
- 8 Oberflächenintegrale
- 9 Integralsätze von Gauß und Stokes

Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung

- 1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik
- 2 Grundbegriffe
- 3 Wahrscheinlichkeit
- 4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen
- 5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
- 6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- 7 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen
- 8 Prüf- oder Testverteilungen

Kapitel III: Grundlagen der mathematischen Statistik

- 1 Grundbegriffe
- 2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe
- 3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)
- 4 Statistische Prüfverfahren für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“)
- 5 Statistische Prüfverfahren für die unbekannte Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“)
- 6 Korrelation und Regression

Kapitel IV: Fehler- und Ausgleichsrechnung

- 1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Meßabweichungen).
Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung
- 2 Statistische Verteilung der Meßwerte und Meßabweichungen („Meßfehler“)
- 3 Auswertung einer Meßreihe
- 4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß
- 5 Ausgleichs- oder Regressionskurven

Anhang: **Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**
 Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben