

# Inhaltsverzeichnis

## Kapitel 0. Mengen und Abbildungen (Nomenklatur)

1. Mengen . . . . .	1
2. Durchschnitt und Vereinigung . . . . .	2
3. Abbildungen (Funktionen) . . . . .	3
4. Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen . . . . .	4
5. Komposition von Abbildungen . . . . .	5
6. Familien und Folgen . . . . .	6
7. Produkte von Mengen . . . . .	6
8. Äquivalenzrelationen . . . . .	7

## Kapitel I. Algebraische Strukturen

§ 1. Gruppen und Homomorphismen . . . . .	9
1. Verknüpfungen . . . . .	9
2. Halbgruppen. Unterhalbgruppen . . . . .	10
3. Neutrale und inverse Elemente . . . . .	12
4. Potenzen . . . . .	13
5. Gruppen . . . . .	14
6. Gruppe der invertierbaren Elemente . . . . .	16
7. Homomorphismen . . . . .	16
§ 2. Untergruppen, Normalteiler und Restklassengruppen . . . . .	18
1. Untergruppen . . . . .	18
2. Ordnung eines Elementes . . . . .	21
3. Darstellung durch Linksmultiplikation . . . . .	22
4. Innere Automorphismen . . . . .	23
5. Nebenklassen und Normalteiler . . . . .	24
6. Kommutatoren und Kommutatorgruppen . . . . .	26
7. Äquivalenzrelationen in Halbgruppen. Restklassengruppen . . . . .	27
§ 3. Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	29
1. Die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	29
2. Fixpunkte. Transpositionen . . . . .	30
3. Der Signumhomomorphismus $\text{sgn}: \mathfrak{S}_n \rightarrow \{1, -1\}$ . . . . .	32

4. Rang eines Homomorphismus. Bijektivitätskriterien	129
5. Verschwindungsräume	131
6. Dimensionsformel $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ und Ranggleichung $\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg} \varphi^*$	132
7. Dualitätsprinzip für endlichdimensionale Vektorräume	133

## Kapitel IV. Lineare Abbildungen und Matrizen

§ 1. Der $R$ -Modul $R^{(m,n)}$ der $(m, n)$ -Matrizen. Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen	135
1. Matrizen	135
2. Transposition von Matrizen	137
3. Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen. Darstellungsisomorphismen	138
4. Duale Abbildungen und transponierte Matrizen	139
5. Darstellung linearer Abbildungen zwischen direkten Summen durch Matrizen	141
§ 2. Multiplikation von Matrizen	142
1. Die allgemeine Multiplikation $R^{(m,n)} \times R^{(n,p)} \rightarrow R^{(m,p)}$	142
2. Multiplikativität der Darstellungsisomorphismen	143
3. Rechenregeln der Matrizenmultiplikation	144
4. Der Isomorphismus $R^{(m,n)} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(R_n, R_m)$	145
5. Skalarprodukt	148
§ 3. Der Matrizenring $R^{(m,m)}$ und die allgemeine lineare Gruppe $\operatorname{GL}(m, R)$	149
1. Der Ring $R^{(m,m)}$	149
2. Der Ringisomorphismus $\Theta_X: \operatorname{End} M \rightarrow R^{(m,m)}$	151
3. Die Gruppe $\operatorname{GL}(m, R)$	151
4. Das Zentrum der Gruppe $\operatorname{GL}(m, R)$	153
5. Antihomomorphismen	153
§ 4. Äquivalente und ähnliche Matrizen	155
1. Übergangsmatrix. Basistransformation	155
2. Äquivalente Matrizen	157
3. Ähnliche Matrizen	158
4. Spurform $\operatorname{Sp}$ für Matrizen	159
5. Spurform $\operatorname{Sp}$ für Endomorphismen	161
6. Invariante Charakterisierung der Spurform	162
§ 5. Matrizenkalkül über Körpern. Rang einer Matrix	163
1. Spaltenrang und Zeilenrang	163
2. Ranggleichung für Matrizen	165
3. Normalformensatz für äquivalente Matrizen	166

§ 6. Lineare Gleichungen . . . . .	167
1. Formulierung des Problems. Geometrische Interpretation . . . . .	167
2. Allgemeine Lösbarkeitskriterien . . . . .	169
3. Lösbarkeitskriterien für Körper . . . . .	170
4. Normalformenmethode. Alternativsatz . . . . .	171
5. Eliminationsmethode . . . . .	174
§ 7. Elementare Matrizenumformungen über Körpern . . . . .	175
1. Die Matrizen $B_{\mu\nu}(b)$ und $D_\mu(d)$ . Elementarmatrizen . . . . .	175
2. Elementare Zeilenumformungen . . . . .	177
3. Elementare Spaltenumformungen . . . . .	179
4. Herstellung der Normalform . . . . .	179
5. Nähere Beschreibung der Produktdarstellung invertierbarer Matrizen durch Elementarmatrizen . . . . .	181
§ 8. Die spezielle lineare Gruppe. Transvektionen und Dilatationen . . . . .	182
1. Definition der Gruppe $SL(m, K)$ . . . . .	182
2. Die Inklusion $\text{Kom } GL(m, K) \subset SL(m, K)$ und die Gleichung $\text{Kom } GL(m, K) = SL(m, K)$ . . . . .	183
3. Geometrische Charakterisierung der Elementarmatrizen $B_{\mu\nu}(b)$ . . . . .	185
4. Die Gleichung $\text{Kom } SL(m, K) = SL(m, K)$ . . . . .	187
5. Geometrische Charakterisierung der Elementarmatrizen $D_\mu(d)$ . . . . .	189
6. Transvektionen und Dilatationen . . . . .	190
7. Die Gruppe $SL(V)$ . . . . .	191

## Kapitel V. Determinanten

§ 1. Multilineare und alternierende Abbildungen . . . . .	193
1. Multilineare Abbildungen. Beispiele . . . . .	193
2. Alternierende und schiefsymmetrische multilineare Abbildungen . . . . .	195
3. Rechenregeln für alternierende Formen . . . . .	197
§ 2. Existenz alternierender Formen . . . . .	199
1. Konstruktion alternierender Formen mittels des Signum-epimorphismus . . . . .	199
2. Konstruktion alternierender $m$ -Formen aus $(m-1)$ -Formen . . . . .	201
§ 3. Determinanten . . . . .	202
1. Determinante eines Endomorphismus . . . . .	202
2. Eigenschaften der Determinante . . . . .	203

3. Determinante einer quadratischen Matrix . . . . .	205
4. Produktregel und Transpositionsinvarianz . . . . .	208
5. Charakterisierung der Gruppe $SL(m, K)$ durch die Determinante . . . . .	210
6. Spur eines Endomorphismus . . . . .	212
§ 4. Determinantenkalkül . . . . .	213
1. Berechnung spezieller Determinanten . . . . .	213
2. Berechnung von Determinanten mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen . . . . .	215
3. Unterdeterminanten . . . . .	218
4. Adjungierte Matrix. Laplacescher Entwicklungssatz . . . . .	219
§ 5. Inverse und adjungierte Matrix . . . . .	221
1. Charakterisierung invertierbarer Matrizen und Endomorphismen durch ihre Determinante. Basiskriterien . . . . .	221
2. Determinantenrang . . . . .	223
3. Die Inklusion $(\det \varphi)M \subset \text{Im } \varphi$ . . . . .	224
4. Rechenregeln für adjungierte Matrizen . . . . .	224
§ 6. Lineare Gleichungen und Determinanten . . . . .	227
1. Cramers Regel . . . . .	227
2. Lineare Gleichungssysteme in Moduln. Epimorphismen endlich erzeugbarer $R$ -Moduln . . . . .	229
3. Eindeigkeitskriterien . . . . .	231
4. Abbildungstheoretische Interpretation . . . . .	233
5. Erzeugendenzahl und Freiheitsgrad . . . . .	234
§ 7. Das charakteristische Polynom . . . . .	236
1. Eigenräume, Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	236
2. Charakteristisches Polynom . . . . .	238
3. Fahnensatz. Trigonalisierbare Matrizen . . . . .	241
4. Satz von Cayley-Hamilton . . . . .	244

### Supplement. Noethersche, artinsche, halbeinfache Moduln

§ 1. Noethersche und artinsche Moduln . . . . .	248
1. Noethersche Moduln . . . . .	248
2. Eigenschaften noetherscher Moduln . . . . .	249
3. Noethersche Ringe . . . . .	250
4. Hilbertscher Basissatz . . . . .	251
5. Artinsche Moduln und artinsche Ringe . . . . .	253
§ 2. Halbeinfache Moduln . . . . .	255
1. Einfache Moduln . . . . .	256
2. Direkte Summen eines einfachen Moduls . . . . .	257

3. Halbeinfache Moduln. Ergänzungssatz . . . . .	259
4. Folgerungen aus dem Ergänzungssatz . . . . .	260
5. Umkehrung des Ergänzungssatzes. Charakterisierung halbeinfacher Moduln . . . . .	261
§ 3. Struktur halbeinfacher Moduln . . . . .	262
1. $m$ -Komponenten. Struktursatz . . . . .	262
2. Isomorphiekriterien für halbeinfache Moduln . . . . .	264
3. Homogene Moduln . . . . .	266
4. Länge halbeinfacher Moduln . . . . .	268
<b>Literatur</b> . . . . .	271
<b>Symbolverzeichnis</b> . . . . .	272
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	273