

Inhalt

Vorwort — XV

Einleitung — 1

1 Auf dem Weg zu den reellen Zahlen — 6

- 1.1 Irrationalität — 6
- 1.2 Inkommensurabilität — 9
 - 1.2.1 Philosophische Krise — 11
 - 1.2.2 Offenbarungseid — 12
 - 1.2.3 Philosophische Fragen — 12
- 1.3 Rechnen mit $\sqrt{2}$? — 13
- 1.4 Näherungsverfahren, Intervallschachtelungen und Vollständigkeit — 14
 - 1.4.1 Zahlengerade? — 17
 - 1.4.2 Über das unendlich Kleine — 19
- 1.5 Zur Konstruktion der reellen Zahlen — 20
- 1.6 Über den Umgang mit dem Unendlichen — 22
- 1.7 Unendliche nicht periodische Dezimalbrüche — 24
 - 1.7.1 Dilemma — 25

2 Aus der Geschichte der Philosophie und Mathematik — 28

- 2.1 Zenon — 30
 - 2.1.1 Paradoxien — 30
 - 2.1.2 Zwischenbemerkung — 34
 - 2.1.3 Ansichten der Paradoxien in der Mathematik — 35
 - 2.1.4 Abschließende Bemerkung — 40
- 2.2 Pythagoras und die Pythagoreer — 41
 - 2.2.1 Zahlen, Zahlenmetaphysik und Zahlentheorie — 41
 - 2.2.2 Wende zur Mathematik — 43
- 2.3 Platon — 44
 - 2.3.1 Ideen — 44
 - 2.3.2 Über Mathematik — 45
 - 2.3.3 Mathematischer Platonismus — 47
- 2.4 Aristoteles — 47
 - 2.4.1 Über Mathematik — 47
 - 2.4.2 Über Theorien — 49
 - 2.4.3 Über Unendlichkeit — 50
 - 2.4.4 Über Schönheit — 51
- 2.5 Euklid — 51
- 2.6 Proklos — 54
- 2.7 Nikolaus von Kues — 56

2.7.1	Zahlen —	56
2.7.2	Unendlichkeit und Endliches —	58
2.8	Descartes —	59
2.9	Pascal —	62
2.10	Leibniz —	64
2.10.1	Wahrheiten —	65
2.10.2	Characteristica universalis —	66
2.11	Kant —	67
2.11.1	Urteile —	67
2.11.2	Reine Anschauung —	69
2.11.3	Zur Mathematik —	70
2.11.4	Unendlichkeit —	72
2.12	Mill und empiristische Konzeptionen —	72
2.12.1	Zur Philosophie —	73
2.12.2	Aus Mills Philosophie der Mathematik —	73
2.12.3	Materialismus und Mathematik —	75
2.13	Bolzano —	77
2.13.1	Zur Analysis —	77
2.13.2	Über Unendlichkeit —	78
2.14	Gauß —	80
2.15	Cantor —	81
2.15.1	Auffassungen über Mathematik —	82
2.15.2	Zum Mengenbegriff —	83
2.15.3	Zur Mengenlehre —	83
2.15.4	Natürliche Zahlen —	85
2.15.5	Zum Kontinuumproblem —	86
2.16	Dedekind —	86
2.16.1	Reelle Zahlen —	87
2.16.2	Natürliche Zahlen —	87
2.16.3	Unendlichkeitsbegriff —	89
2.17	Poincaré —	90
2.17.1	Verstand und Intuition —	91
2.17.2	Über Induktion —	92
2.17.3	Konstruktivistische Kritik —	92
2.17.4	Konventionalismus —	93
2.18	Peirces Pragmatismus und die Welt der Zeichen —	95
2.18.1	Grundsätze —	95
2.18.2	Welt der Zeichen —	97
2.19	Husserls Phänomenologie —	98
2.19.1	Grundzüge der Phänomenologie —	100
2.19.2	Philosophie der Arithmetik —	101
2.19.3	Mathematikphilosophische Wirkung —	104

2.20	Logizismus — 106
2.20.1	Entwicklung — 106
2.20.2	Freges und Russells Konzeption — 110
2.20.3	Freges Zahlen — 111
2.20.4	Probleme — 112
2.20.5	Weitere Entwicklung — 114
2.21	Intuitionismus — 116
2.21.1	Entstehung — 116
2.21.2	Grundsätze und Logizismuskritik — 119
2.21.3	Zeit, Zahlen, Sprache — 121
2.21.4	Weitere Entwicklung — 123
2.22	Konstruktivismus — 126
2.23	Formalismus — 128
2.23.1	Hilbertsches Programm — 128
2.23.2	Formalisierung und Konservativität — 131
2.23.3	Einschnitt: Unvollständigkeitssätze — 133
2.23.4	Verallgemeinertes und eingeschränktes Programm — 135
2.24	Kurt Gödels philosophische Auffassungen — 136
2.24.1	Wahrheit und Beweisbarkeit — 137
2.24.2	Platonismus — 138
2.24.3	Intuition — 140
2.24.4	Schlussbemerkung — 142
2.25	Philosophie der Mathematik von 1931 bis zum Ende der 1950er Jahre — 142
2.25.1	Quine — 143
2.25.2	Wittgenstein — 144
2.25.3	Anmerkungen — 145
2.26	Der evolutionäre Standpunkt – eine neue philosophische Grundposition — 146
2.26.1	Charakterisierung — 147
2.26.2	Über Grundprinzipien — 148
2.26.3	Über Grundhypothesen — 150
2.26.4	Zur Entwicklung der Zahlen in Vor- und Frühgeschichte — 151
2.26.5	Eine kulturanthropologische Studie — 152
2.26.6	Beiträge aus der Psychologie — 155
2.26.7	Entwicklungspsychologische Annahmen — 156
2.26.8	Piagets Zahlen — 158
2.26.9	Zählen, Objekte, Mengenbildung — 159
2.26.10	Über ein kognitionspsychologisches Projekt — 160
2.26.11	Schlussbemerkung — 162
2.27	Philosophie der Mathematik nach 1960 — 163
2.27.1	Quasi-empirische Konzeptionen — 165
2.27.2	Realismus und Antirealismus — 173

3	Über Grundfragen der Philosophie der Mathematik — 176
3.1	Zum Zahlbegriff — 176
3.1.1	Überblick über einige Ansichten — 177
3.1.2	Resümee — 180
3.1.3	Genese des Zahlbegriffs und Philosophie der Mathematik — 183
3.1.4	Schlussbemerkung — 185
3.2	Unendlichkeiten — 186
3.2.1	Über die Problematik des Unendlichen — 186
3.2.2	Die Auffassung des Aristoteles — 190
3.2.3	Die idealistische Auffassung — 190
3.2.4	Der empiristische Standpunkt — 191
3.2.5	Unendlichkeit bei Kant — 193
3.2.6	Die intuitionistische Unendlichkeit — 194
3.2.7	Die logizistische Hypothese des Unendlichen — 195
3.2.8	Unendlichkeit und die neuere Philosophie der Mathematik — 195
3.2.9	Formalistische Haltung und heutige Tendenzen — 196
3.3	Das Kontinuum und das unendlich Kleine — 198
3.3.1	Das allgemeine Problem — 198
3.3.2	Aus der Geschichte des Kontinuums — 200
3.3.3	Zwischenbemerkung — 212
3.3.4	Was ist ein Punkt? — 212
3.3.5	Aus der Geschichte des Kontinuums – Fortsetzung — 219
3.3.6	Eine Übersicht über Auffassungen des Kontinuums — 223
3.3.7	Notizen zur Arithmetisierung des Kontinuums — 226
3.3.8	Das Ende der Infinitesimalien und ihre Wiederentdeckung — 228
3.3.9	Nichtstandardzahlen und das Kontinuum — 238
3.3.10	Folgen für die Auffassung des Kontinuums — 240
3.3.11	Medium freien Werdens — 245
3.3.12	Das Verschwinden der Größen — 247
3.3.13	Abschließende Bemerkungen — 253
3.4	Zum Problem der Anwendbarkeit der Mathematik — 258
3.4.1	Aspekte des Problems — 258
3.4.2	Das Problem der Anwendung in früheren Philosophien der Mathematik — 263
3.4.3	Die klassischen Positionen — 270
3.4.4	Neuere Konzeptionen — 272
3.4.5	Abschließende Bemerkungen — 273
3.5	Notizen im Rückblick — 278
3.5.1	Von den natürlichen zu den rationalen Zahlen — 280
3.5.2	Über Inkommensurabilität und Irrationalität — 281
3.5.3	Zur Adjunktion — 282
3.5.4	Über das lineare Kontinuum — 283

- 3.5.5 Über das unendlich Kleine — 284
- 3.5.6 Konstruktion, Unendlichkeit, unendliche nicht periodische
Dezimalbrüche — 285
- 3.5.7 Abschließende Notiz — 287

4 Mengen und Mengenlehren — 289

- 4.1 Paradoxien des Unendlichen — 290
- 4.2 Über den Begriff der Menge — 292
 - 4.2.1 Zusammenfassung versus Zusammensetzung — 292
 - 4.2.2 Mengen und das Universalienproblem — 293
- 4.3 Zwei Mengenlehren — 296
 - 4.3.1 Die Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel — 298
 - 4.3.2 Die Mengenlehre nach von Neumann, Bernays und Gödel — 307
 - 4.3.3 Anmerkungen — 312
 - 4.3.4 Über Modifikationen — 314
- 4.4 Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese — 315
 - 4.4.1 Suche nach neuen Axiomen — 321
 - 4.4.2 Weitere Bemerkungen und Fragen — 326
- 4.5 Schlussbemerkungen — 328
 - 4.5.1 Was sind Mengen? — 328
 - 4.5.2 Kommentare zu den mengentheoretischen Axiomen — 329
 - 4.5.3 Mathematisch denken — 331
 - 4.5.4 Unendlichkeit — 333

5 Axiomatik und Logik — 334

- 5.1 Einige Elemente der mathematischen Logik — 335
 - 5.1.1 Syntax — 335
 - 5.1.2 Semantik — 338
 - 5.1.3 Kalkül — 341
- 5.2 Bemerkungen zur Geschichte — 343
 - 5.2.1 Aus der Geschichte der Logik — 344
 - 5.2.2 Zur Geschichte der Axiomatik — 352
- 5.3 Logische Axiomatik und Theorien — 358
 - 5.3.1 Peano-Arithmetik — 359
 - 5.3.2 Über die Axiomatik der reellen Zahlen — 362
- 5.4 Über die Arithmetik der natürlichen Zahlen — 368
 - 5.4.1 Zum syntaktischen Aspekt — 368
 - 5.4.2 Zum semantischen Aspekt — 371
- 5.5 Wahrheit und Beweisbarkeit — 375
 - 5.5.1 Formale Wahrheit — 376
 - 5.5.2 Vollständigkeit und Wahrheit — 377
 - 5.5.3 Syntaktische Reduktion der Wahrheit — 379

5.5.4	Wahrheit ungleich Beweisbarkeit —	381
5.5.5	Suche nach Auswegen —	383
5.5.6	Abschließende Bemerkung —	385
5.6	Über Beweisen und Beweis —	386
5.6.1	Historisches —	387
5.6.2	Über informelle Beweise —	395
5.6.3	Über formale Beweise —	399
5.6.4	Die Beweis-These —	401
5.6.5	Vertrauen —	402
5.7	Fazit —	404
5.7.1	Logik als Hintergrund von Mathematik —	404
5.7.2	Auswirkungen auf die Gestalt und Bedeutung von Mathematik —	406
6	Infinitesimal denken und rechnen —	408
6.1	Vorbemerkungen —	408
6.2	Die „0,999 ...“-Frage —	410
6.2.1	Empirisches —	410
6.2.2	$0,999 \dots = 1$. Wieso? —	411
6.2.3	$0,999 \dots = 1$. Probleme —	413
6.2.4	Problematik „Grenzwert“ —	415
6.2.5	$0,999 \dots < 1$. Wieso? —	416
6.2.6	Antwort —	419
6.2.7	Schlussbemerkung —	424
6.3	Etwas Infinitesimalrechnung —	426
6.3.1	Infinitesimal rechnen —	426
6.3.2	Integral, Hauptsatz, Differentialquotient, Ableitung, Stetigkeit —	429
6.3.3	Elementare Sätze —	437
6.4	Zur Konstruktion der hyperreellen Zahlen —	440
6.4.1	Hypernatürliche Zahlen —	441
6.4.2	Hyperreelle Zahlen —	442
6.4.3	Wie wird ${}^*\mathbb{R}$ ein Modell von \mathbb{R} ? —	444
6.4.4	Zur Begründung des naiven infinitesimalen Rechnens —	445
6.5	Der axiomatische Zugang IST —	446
6.5.1	Erweiterung der Sprache —	446
6.5.2	Die zusätzlichen Axiome von IST —	448
6.5.3	Elementare Analysis in der internen Mengenlehre —	450
6.5.4	Zur Rolle des Auswahlaxioms —	451
6.5.5	Andere axiomatische Zugänge —	452
6.5.6	Nichtstandardperspektiven auf die Mengenlehre —	452
6.6	Über den Status der Nichtstandardzahlen —	453
6.6.1	In welchem Sinne existieren Nichtstandardzahlen? —	454
6.6.2	Was können wir über Nichtstandardzahlen wissen? —	458

- 6.6.3 Anwendbarkeit — **460**
- 6.6.4 Zusammenfassung — **462**
- 6.7 Schluss — **464**

7 Rückblick — 467

- 7.1 Setzung der reellen Zahlen — **468**
- 7.2 Axiomatische Methode — **470**
- 7.3 Zahlbegriff — **471**
- 7.4 Unendlichkeit, Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese — **472**
- 7.5 Das unendlich Kleine und das Kontinuum — **474**
- 7.6 Anwendbarkeit — **475**
- 7.7 Theoretische Grenzen — **476**
- 7.8 Computereinsatz — **477**
- 7.9 Was ist Philosophie der Mathematik und wozu dient sie? — **478**
- 7.10 Evidenz und Transzendenz — **481**

Kurzbiographien — 483

Literatur — 499

Personenverzeichnis — 515

Symbolverzeichnis — 523

Begriffsverzeichnis — 525