

Inhalt

Vorwort — XV

Einleitung — 1

1	Auf dem Weg zu den reellen Zahlen — 6
1.1	Irrationalität — 6
1.2	Inkommensurabilität — 9
1.2.1	Philosophische Krise — 11
1.2.2	Offenbarungseid — 12
1.2.3	Philosophische Fragen — 12
1.3	Rechnen mit $\sqrt{2}$? — 13
1.4	Näherungsverfahren, Intervallschachtelungen und Vollständigkeit — 14
1.4.1	Zahlengerade? — 17
1.4.2	Über das unendlich Kleine — 19
1.5	Zur Konstruktion der reellen Zahlen — 20
1.6	Über den Umgang mit dem Unendlichen — 22
1.7	Unendliche nicht periodische Dezimalbrüche — 24
1.7.1	Dilemma — 25
2	Aus der Geschichte der Philosophie und Mathematik — 28
2.1	Zenon — 30
2.1.1	Paradoxien — 30
2.1.2	Zwischenbemerkung — 34
2.1.3	Ansichten der Paradoxien in der Mathematik — 35
2.1.4	Abschließende Bemerkung — 40
2.2	Pythagoras und die Pythagoreer — 41
2.2.1	Zahlen, Zahlenmetaphysik und Zahlentheorie — 41
2.2.2	Wende zur Mathematik — 43
2.3	Platon — 44
2.3.1	Ideen — 44
2.3.2	Über Mathematik — 45
2.3.3	Mathematischer Platonismus — 47
2.4	Aristoteles — 47
2.4.1	Über Mathematik — 47
2.4.2	Über Theorien — 49
2.4.3	Über Unendlichkeit — 50
2.4.4	Über Schönheit — 51
2.5	Euklid — 51
2.6	Proklos — 54
2.7	Nikolaus von Kues — 56

2.7.1	Zahlen — 56
2.7.2	Unendlichkeit und Endliches — 58
2.8	Descartes — 59
2.9	Pascal — 62
2.10	Leibniz — 64
2.10.1	Wahrheiten — 65
2.10.2	Characteristica universalis — 66
2.11	Kant — 67
2.11.1	Urteile — 67
2.11.2	Reine Anschauung — 69
2.11.3	Zur Mathematik — 70
2.11.4	Unendlichkeit — 72
2.12	Mill und empiristische Konzeptionen — 72
2.12.1	Zur Philosophie — 73
2.12.2	Aus Mills Philosophie der Mathematik — 73
2.12.3	Materialismus und Mathematik — 75
2.13	Bolzano — 77
2.13.1	Zur Analysis — 77
2.13.2	Über Unendlichkeit — 78
2.14	Gauß — 80
2.15	Cantor — 81
2.15.1	Auffassungen über Mathematik — 82
2.15.2	Zum Mengenbegriff — 83
2.15.3	Zur Mengenlehre — 83
2.15.4	Natürliche Zahlen — 85
2.15.5	Zum Kontinuumproblem — 86
2.16	Dedekind — 86
2.16.1	Reelle Zahlen — 87
2.16.2	Natürliche Zahlen — 87
2.16.3	Unendlichkeitsbegriff — 89
2.17	Poincaré — 90
2.17.1	Verstand und Intuition — 91
2.17.2	Über Induktion — 92
2.17.3	Konstruktivistische Kritik — 92
2.17.4	Konventionalismus — 93
2.18	Peirces Pragmatismus und die Welt der Zeichen — 95
2.18.1	Grundsätze — 95
2.18.2	Welt der Zeichen — 97
2.19	Husserls Phänomenologie — 98
2.19.1	Grundzüge der Phänomenologie — 100
2.19.2	Philosophie der Arithmetik — 101
2.19.3	Mathematikphilosophische Wirkung — 104

2.20	Logizismus — 106
2.20.1	Entwicklung — 106
2.20.2	Freges und Russells Konzeption — 110
2.20.3	Freges Zahlen — 111
2.20.4	Probleme — 112
2.20.5	Weitere Entwicklung — 114
2.21	Intuitionismus — 116
2.21.1	Entstehung — 116
2.21.2	Grundsätze und Logizismuskritik — 119
2.21.3	Zeit, Zahlen, Sprache — 121
2.21.4	Weitere Entwicklung — 123
2.22	Konstruktivismus — 126
2.23	Formalismus — 128
2.23.1	Hilbertsches Programm — 128
2.23.2	Formalisierung und Konservativität — 131
2.23.3	Einschnitt: Unvollständigkeitssätze — 133
2.23.4	Verallgemeinertes und eingeschränktes Programm — 135
2.24	Kurt Gödels philosophische Auffassungen — 136
2.24.1	Wahrheit und Beweisbarkeit — 137
2.24.2	Platonismus — 138
2.24.3	Intuition — 140
2.24.4	Schlussbemerkung — 142
2.25	Philosophie der Mathematik von 1931 bis zum Ende der 1950er Jahre — 142
2.25.1	Quine — 143
2.25.2	Wittgenstein — 144
2.25.3	Anmerkungen — 145
2.26	Der evolutionäre Standpunkt – eine neue philosophische Grundposition — 146
2.26.1	Charakterisierung — 147
2.26.2	Über Grundprinzipien — 148
2.26.3	Über Grundhypthesen — 150
2.26.4	Zur Entwicklung der Zahlen in Vor- und Frühgeschichte — 151
2.26.5	Eine kulturanthropologische Studie — 152
2.26.6	Beiträge aus der Psychologie — 155
2.26.7	Entwicklungspsychologische Annahmen — 156
2.26.8	Piagets Zahlen — 158
2.26.9	Zählen, Objekte, Mengenbildung — 159
2.26.10	Über ein kognitionspsychologisches Projekt — 160
2.26.11	Schlussbemerkung — 162
2.27	Philosophie der Mathematik nach 1960 — 163
2.27.1	Quasi-empirische Konzeptionen — 165
2.27.2	Realismus und Antirealismus — 173

3	Über Grundfragen der Philosophie der Mathematik — 176
3.1	Zum Zahlbegriff — 176
3.1.1	Überblick über einige Ansichten — 177
3.1.2	Resümee — 180
3.1.3	Genese des Zahlbegriffs und Philosophie der Mathematik — 183
3.1.4	Schlussbemerkung — 185
3.2	Unendlichkeiten — 186
3.2.1	Über die Problematik des Unendlichen — 186
3.2.2	Die Auffassung des Aristoteles — 190
3.2.3	Die idealistische Auffassung — 190
3.2.4	Der empiristische Standpunkt — 191
3.2.5	Unendlichkeit bei Kant — 193
3.2.6	Die intuitionistische Unendlichkeit — 194
3.2.7	Die logizistische Hypothese des Unendlichen — 195
3.2.8	Unendlichkeit und die neuere Philosophie der Mathematik — 195
3.2.9	Formalistische Haltung und heutige Tendenzen — 196
3.3	Das Kontinuum und das unendlich Kleine — 198
3.3.1	Das allgemeine Problem — 198
3.3.2	Aus der Geschichte des Kontinuums — 200
3.3.3	Zwischenbemerkung — 212
3.3.4	Was ist ein Punkt? — 212
3.3.5	Aus der Geschichte des Kontinuums – Fortsetzung — 219
3.3.6	Eine Übersicht über Auffassungen des Kontinuums — 223
3.3.7	Notizen zur Arithmetisierung des Kontinuums — 226
3.3.8	Das Ende der Infinitesimalien und ihre Wiederentdeckung — 228
3.3.9	Nichtstandardzahlen und das Kontinuum — 238
3.3.10	Folgen für die Auffassung des Kontinuums — 240
3.3.11	Medium freien Werdens — 245
3.3.12	Das Verschwinden der Größen — 247
3.3.13	Abschließende Bemerkungen — 253
3.4	Zum Problem der Anwendbarkeit der Mathematik — 258
3.4.1	Aspekte des Problems — 258
3.4.2	Das Problem der Anwendung in früheren Philosophien der Mathematik — 263
3.4.3	Die klassischen Positionen — 270
3.4.4	Neuere Konzeptionen — 272
3.4.5	Abschließende Bemerkungen — 273
3.5	Notizen im Rückblick — 278
3.5.1	Von den natürlichen zu den rationalen Zahlen — 280
3.5.2	Über Incommensurabilität und Irrationalität — 281
3.5.3	Zur Adjunktion — 282
3.5.4	Über das lineare Kontinuum — 283

3.5.5	Über das unendlich Kleine — 284
3.5.6	Konstruktion, Unendlichkeit, unendliche nicht periodische Dezimalbrüche — 285
3.5.7	Abschließende Notiz — 287
4	Mengen und Mengenlehren — 289
4.1	Paradoxien des Unendlichen — 290
4.2	Über den Begriff der Menge — 292
4.2.1	Zusammenfassung versus Zusammensetzung — 292
4.2.2	Mengen und das Universalienproblem — 293
4.3	Zwei Mengenlehren — 296
4.3.1	Die Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel — 298
4.3.2	Die Mengenlehre nach von Neumann, Bernays und Gödel — 307
4.3.3	Anmerkungen — 312
4.3.4	Über Modifikationen — 314
4.4	Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese — 315
4.4.1	Suche nach neuen Axiomen — 321
4.4.2	Weitere Bemerkungen und Fragen — 326
4.5	Schlussbemerkungen — 328
4.5.1	Was sind Mengen? — 328
4.5.2	Kommentare zu den mengentheoretischen Axiomen — 329
4.5.3	Mathematisch denken — 331
4.5.4	Unendlichkeit — 333
5	Axiomatik und Logik — 334
5.1	Einige Elemente der mathematischen Logik — 335
5.1.1	Syntax — 335
5.1.2	Semantik — 338
5.1.3	Kalkül — 341
5.2	Bemerkungen zur Geschichte — 343
5.2.1	Aus der Geschichte der Logik — 344
5.2.2	Zur Geschichte der Axiomatik — 352
5.3	Logische Axiomatik und Theorien — 358
5.3.1	Peano-Arithmetik — 359
5.3.2	Über die Axiomatik der reellen Zahlen — 362
5.4	Über die Arithmetik der natürlichen Zahlen — 368
5.4.1	Zum syntaktischen Aspekt — 368
5.4.2	Zum semantischen Aspekt — 371
5.5	Wahrheit und Beweisbarkeit — 375
5.5.1	Formale Wahrheit — 376
5.5.2	Vollständigkeit und Wahrheit — 377
5.5.3	Syntaktische Reduktion der Wahrheit — 379

5.5.4	Wahrheit ungleich Beweisbarkeit — 381
5.5.5	Suche nach Auswegen — 383
5.5.6	Abschließende Bemerkung — 385
5.6	Über Beweisen und Beweis — 386
5.6.1	Historisches — 387
5.6.2	Über informelle Beweise — 395
5.6.3	Über formale Beweise — 399
5.6.4	Die Beweis-These — 401
5.6.5	Vertrauen — 402
5.7	Fazit — 404
5.7.1	Logik als Hintergrund von Mathematik — 404
5.7.2	Auswirkungen auf die Gestalt und Bedeutung von Mathematik — 406

6	Infinitesimal denken und rechnen — 408
6.1	Vorbemerkungen — 408
6.2	Die „0,999 ...“-Frage — 410
6.2.1	Empirisches — 410
6.2.2	0,999 ... = 1. Wieso? — 411
6.2.3	0,999 ... = 1. Probleme — 413
6.2.4	Problematik „Grenzwert“ — 415
6.2.5	0,999 ... < 1. Wieso? — 416
6.2.6	Antwort — 419
6.2.7	Schlussbemerkung — 424
6.3	Etwas Infinitesimalrechnung — 426
6.3.1	Infinitesimal rechnen — 426
6.3.2	Integral, Hauptsatz, Differentialquotient, Ableitung, Stetigkeit — 429
6.3.3	Elementare Sätze — 437
6.4	Zur Konstruktion der hyperreellen Zahlen — 440
6.4.1	Hypernatürliche Zahlen — 441
6.4.2	Hyperreelle Zahlen — 442
6.4.3	Wie wird ${}^*\mathbb{R}$ ein Modell von \mathbb{R} ? — 444
6.4.4	Zur Begründung des naiven infinitesimalen Rechnens — 445
6.5	Der axiomatische Zugang IST — 446
6.5.1	Erweiterung der Sprache — 446
6.5.2	Die zusätzlichen Axiome von IST — 448
6.5.3	Elementare Analysis in der internen Mengenlehre — 450
6.5.4	Zur Rolle des Auswahlaxioms — 451
6.5.5	Andere axiomatische Zugänge — 452
6.5.6	Nichtstandardperspektiven auf die Mengenlehre — 452
6.6	Über den Status der Nichtstandardzahlen — 453
6.6.1	In welchem Sinne existieren Nichtstandardzahlen? — 454
6.6.2	Was können wir über Nichtstandardzahlen wissen? — 458

6.6.3	Anwendbarkeit — 460
6.6.4	Zusammenfassung — 462
6.7	Schluss — 464
7	Rückblick — 467
7.1	Setzung der reellen Zahlen — 468
7.2	Axiomatische Methode — 470
7.3	Zahlbegriff — 471
7.4	Unendlichkeit, Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese — 472
7.5	Das unendlich Kleine und das Kontinuum — 474
7.6	Anwendbarkeit — 475
7.7	Theoretische Grenzen — 476
7.8	Computereinsatz — 477
7.9	Was ist Philosophie der Mathematik und wozu dient sie? — 478
7.10	Evidenz und Transzendenz — 481
	Kurzbiographien — 483
	Literatur — 499
	Personenverzeichnis — 515
	Symbolverzeichnis — 523
	Begriffsverzeichnis — 525