

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
----------------	----------

TEIL I: Ausgangspunkte

1 Grundlagen der linearen Algebra	1
1.1 Vektorräume	1
1.2 Matrizen	3
1.3 Operationen mit Matrizen	5
1.3.1 Inverse einer Matrix	6
1.3.2 Matrizen und lineare Abbildungen	7
1.3.3 Operationen mit Blockmatrizen	8
1.4 Spur und Determinante einer Matrix	9
1.5 Rang und Kern einer Matrix	10
1.6 Spezielle Matrizen	11
1.6.1 Blockdiagonale Matrizen	11
1.6.2 Trapez- und Dreiecksmatrizen	11
1.6.3 Bandmatrizen	12
1.7 Eigenwerte und Eigenvektoren	12
1.8 Ähnlichkeitstransformationen	14
1.9 Die Singulärwertzerlegung (SVD)	17
1.10 Skalarprodukte und Normen in Vektorräumen	18
1.11 Matrixnormen	22
1.11.1 Beziehung zwischen Matrixnormen und dem Spektralradius einer Matrix	26

1.11.2	Folgen und Reihen von Matrizen	27
1.12	Positiv definite, diagonaldominante und M-Matrizen	29
1.13	Übungen	31
2	Grundlagen der Numerischen Mathematik	35
2.1	Korrektheit und Konditionszahl eines Problems	35
2.2	Stabilität numerischer Methoden	39
2.2.1	Beziehungen zwischen Stabilität und Konvergenz . .	43
2.3	<i>A priori</i> und <i>a posteriori</i> Analysis	44
2.4	Fehlerquellen in Berechnungsmodellen	46
2.5	Computerzahlen	48
2.5.1	Das Positionssystem	48
2.5.2	Das Gleitkommazahlensystem	49
2.5.3	Verteilung von Gleitpunktzahlen	52
2.5.4	IEC/IEEE Arithmetik	53
2.5.5	Runden einer reellen Zahl in Maschinendarstellung .	54
2.5.6	Maschinengleitpunktoperationen	55
2.6	Übungen	58
TEIL II: Numerische lineare Algebra		
3	Direkte Methoden zur Lösung linearer Systeme	61
3.1	Stabilitätsanalyse linearer Systeme	62
3.1.1	Die Konditionszahl einer Matrix	63
3.1.2	<i>A priori</i> Vorwärtsanalyse	64
3.1.3	<i>A priori</i> Rückwärtsanalyse	67
3.1.4	<i>A posteriori</i> Analyse	68
3.2	Lösung von Dreieckssystemen	69
3.2.1	Implementation der Substitutionsmethoden	70
3.2.2	Rundungsfehleranalyse	71
3.2.3	Inverse einer Dreiecksmatrix	72
3.3	Gauß-Elimination (GEM) und LU-Faktorisierung	73
3.3.1	GEM als Faktorisierungsmethode	76
3.3.2	Die Auswirkung von Rundungsfehlern	81
3.3.3	Implementation der LU-Faktorisierung	82
3.3.4	Kompakte Formen der Faktorisierung	83
3.4	Andere Arten der Zerlegung	84
3.4.1	LDM ^T -Faktorisierung	84
3.4.2	Symmetrische und positiv definite Matrizen: Die Cholesky-Faktorisierung	85
3.4.3	Rechteckmatrizen: Die QR-Faktorisierung	87
3.5	Pivotisierung	91
3.6	Berechnung der Inversen einer Matrix	95
3.7	Bandsysteme	96
3.7.1	Tridiagonale Matrizen	97

3.7.2	Aspekte der Implementierung	98
3.8	Blocksysteme	100
3.8.1	Block-LU-Faktorisierung	100
3.8.2	Inverse einer blockpartitionierten Matrix	101
3.8.3	Blocktridiagonale Systeme	101
3.9	Schwachbesetzte Matrizen	103
3.9.1	Cuthill-McKee-Algorithmus	106
3.9.2	Zerlegung in Substrukturen	107
3.9.3	Geschachtelte Zerlegung	110
3.10	Die durch die GEM erzielte Genauigkeit der Lösung	110
3.11	Approximative Berechnung von $K(A)$	113
3.12	Verbesserung der Genauigkeit der GEM	117
3.12.1	Skalierung	117
3.12.2	Iterative Verbesserung	119
3.13	Unbestimmte Systeme	120
3.14	Anwendungen	123
3.14.1	Knotenanalyse eines Fachwerkes	123
3.14.2	Regularisierung eines Dreiecksgitters	125
3.15	Übungen	129
4	Iterative Methoden zur Lösung	
	linearer Gleichungssysteme	133
4.1	Über die Konvergenz iterativer Methoden	134
4.2	Lineare iterative Methoden	136
4.2.1	Jacobi-, Gauß-Seidel- und Relaxationsmethoden	137
4.2.2	Konvergenzresultate für Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren	139
4.2.3	Konvergenzresultate für die Relaxationsmethode	141
4.2.4	<i>A priori</i> Vorwärtsanalyse	142
4.2.5	Blockmatrizen	143
4.2.6	Symmetrische Form des Gauß-Seidel- und des SOR-Verfahrens	144
4.2.7	Implementierungsfragen	146
4.3	Stationäre und instationäre iterative Verfahren	147
4.3.1	Konvergenzanalyse des Richardson-Verfahrens	148
4.3.2	Vorkonditionierer	150
4.3.3	Das Gradientenverfahren	158
4.3.4	Das Verfahren der konjugierten Gradienten	162
4.3.5	Das vorkonditionierte Verfahren der konjugierten Gradienten	169
4.3.6	Das Verfahren der alternierenden Richtungen	171
4.4	Methoden, die auf Krylov-Teilraumiterationen basieren	171
4.4.1	Das Arnoldi-Verfahren für lineare Systeme	175
4.4.2	Das GMRES-Verfahren	177
4.4.3	Das Lanczos-Verfahren für symmetrische Systeme	180

4.5	Das Lanczos-Verfahren für unsymmetrische Systeme	181
4.6	Abbruchkriterien	184
4.6.1	Ein auf den Zuwachs basierender Abbruchtest	185
4.6.2	Ein auf das Residuum basiertes Abbruchkriterium	187
4.7	Anwendungen	187
4.7.1	Analyse eines elektrischen Netzwerkes	188
4.7.2	Finite Differenzen Analyse der Balkenbiegung	190
4.8	Übungen	192
5	Approximation von Eigenwerten und Eigenvektoren	197
5.1	Geometrische Lage der Eigenwerte	198
5.2	Stabilität und Analyse der Kondition	201
5.2.1	<i>A priori</i> Abschätzungen	201
5.2.2	<i>A posteriori</i> Abschätzungen	205
5.3	Die Methode der Vektoriteration	206
5.3.1	Approximation des betragsmäßig größten Eigenwertes	207
5.3.2	Inverse Iteration	209
5.3.3	Implementierungsaspekte	211
5.4	Die QR-Iteration	214
5.5	Das Basisverfahren der QR-Iteration	216
5.6	Die QR-Methode für Matrizen in Hessenberg-Form	218
5.6.1	Householder- und Givens-Transformationsmatrizen	219
5.6.2	Reduktion einer Matrix in Hessenberg-Form	222
5.6.3	QR-Faktorisierung einer Matrix in Hessenberg-Form	224
5.6.4	Die Basisform der QR-Iteration beginnend mit oberer Hessenberg-Form	225
5.6.5	Implementation der Transformationsmatrizen	228
5.7	Die QR-Iteration mit Verschiebungen	230
5.7.1	Die QR-Methode mit einfacher Verschiebung	231
5.7.2	Die QR-Methode mit doppelter Verschiebung	233
5.8	Berechnung der Eigenvektoren und die SVD einer Matrix	236
5.8.1	Die inverse Hessenberg-Iteration	237
5.8.2	Berechnung der Eigenvektoren aus der Schur-Form einer Matrix	237
5.8.3	Approximative Berechnung der SVD einer Matrix	238
5.9	Das verallgemeinerte Eigenwertproblem	240
5.9.1	Berechnung der verallgemeinerten reellen Schur-Form	241
5.9.2	Verallgemeinerte reelle Schur-Form von symmetrisch- definiten Büscheln	242
5.10	Methoden für Eigenwerte symmetrischer Matrizen	243
5.10.1	Die Jacobi-Methode	243
5.10.2	Die Methode der Sturmschen Ketten	246
5.11	Das Lanczos-Verfahren	249
5.12	Anwendungen	252
5.12.1	Analyse der Knicklast eines Balkens	252

5.12.2 Freie dynamische Schwingungen einer Brücke	255
5.13 Übungen	257

TEIL III: Nichtlineare Gleichungen und Optimierung

6 Bestimmung der Wurzeln nichtlinearer Gleichungen	261
6.1 Kondition einer nichtlinearen Gleichung	262
6.2 Ein geometrisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung . .	264
6.2.1 Die Bisektionsmethode	265
6.2.2 Das Sehnungsverfahren, das Sekantenverfahren, die Re- gula Falsi und das Newton-Verfahren	267
6.2.3 Das Dekker-Brent-Verfahren	272
6.3 Fixpunkt-Iterationen für nichtlineare Gleichungen	274
6.3.1 Konvergenzresultate für einige Fixpunktmethoden .	277
6.4 Nullstellen algebraischer Gleichungen	278
6.4.1 Das Hornerschema und die Reduktion	279
6.4.2 Das Newton-Horner-Schema	281
6.4.3 Das Muller-Verfahren	284
6.5 Abbruchkriterien	287
6.6 Nachbearbeitungstechniken für iterative Methoden	289
6.6.1 Aitken-Beschleunigung	289
6.6.2 Techniken für mehrfache Wurzeln	292
6.7 Anwendungen	294
6.7.1 Analyse der Zustandsgleichung für reale Gase	294
6.7.2 Analyse einer nichtlinearen elektrischen Schaltung .	296
6.8 Übungen	297
7 Nichtlineare Systeme und numerische Optimierung	301
7.1 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	302
7.1.1 Newton-Verfahren und seine Varianten	303
7.1.2 Modifiziertes Newton-Verfahren	305
7.1.3 Quasi-Newton-Verfahren	308
7.1.4 Sekantenähnliche Verfahren	309
7.1.5 Fixpunktmethoden	311
7.2 Nichtrestringierte Optimierung	315
7.2.1 Direkte Suchverfahren	316
7.2.2 Abstiegsmethoden	321
7.2.3 Liniensuchverfahren	323
7.2.4 Abstiegsmethoden für quadratische Funktionen . . .	326
7.2.5 Newton-ähnliche Methoden zur Minimierung von Funk- tionen	328
7.2.6 Quasi-Newton-Verfahren	329
7.2.7 Sekantenähnliche Verfahren	331
7.3 Optimierung unter Nebenbedingungen	333

7.3.1	Notwendige Kuhn-Tucker Bedingungen für nichtli- neare Optimierung	335
7.3.2	Die Strafmethode	337
7.3.3	Die Methode der Langrangeschen Multiplikatoren . .	339
7.4	Anwendungen	342
7.4.1	Lösung eines nichtlinearen Systems bei der Halblei- terbauteilsimulation	342
7.4.2	Nichtlineare Regularisierung eines Diskretisierungs- gitters	345
7.5	Übungen	348
Literatur		351
Index der MATLAB Programme		361
Index		363