

GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATIK	1
ZAHLENFOLGEN	2
FUNKTIONEN UND IHRE EIGENSCHAFTEN	3
GLEICHUNGEN UND GLEICHUNGSSYSTEME	4
GRENZWERTE UND STETIGKEIT	5
DIFFERENZIALRECHNUNG	6
INTEGRALRECHNUNG	7
DIFFERENZEN- UND DIFFERENZIALGLEICHUNGEN	8
KOMPLEXE ZAHLEN	9
VEKTOREN UND VEKTORRÄUME	10
ANALYTISCHE GEOMETRIE	11
MATRIZEN	12
WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE	13
BESCHREIBENDE UND BEURTEILENDE STATISTIK	14
RECHENHILFSMITTEL	15
ANHANG	A

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe der Mathematik	9
1.1	Mengen	10
1.1.1	Der Begriff <i>Menge</i>	10
1.1.2	Mengenrelationen	12
1.1.3	Mengenoperationen	13
1.2	Logische Operationen mit Aussagen und Aussageformen	16
1.3	Definitionen	20
1.4	Schlussregeln	22
1.5	Beweise	25
2	Zahlenfolgen	29
2.1	Der Begriff <i>Zahlenfolge</i>	30
2.2	Eigenschaften von Zahlenfolgen	32
2.2.1	Monotonie und Beschränktheit	32
2.2.2	Partialsummen	34
2.3	Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen	35
3	Funktionen und ihre Eigenschaften	41
3.1	Der Begriff <i>Funktion</i>	42
3.2	Darstellung von Funktionen	44
3.3	Eigenschaften von Funktionen	46
3.3.1	Monotonie und Beschränktheit	46
3.3.2	Symmetrie	47
3.3.3	Periodizität	47
3.3.4	Umkehrbarkeit	48
3.3.5	Nullstellen	49
3.3.6	Abschnittsweise definierte Funktionen	49
3.4	Verknüpfen und Verketteten von Funktionen	51
3.5	Funktionenscharen	53
3.6	Klassen reeller Funktionen	54
3.6.1	Einteilung	54
3.6.2	Lineare Funktionen	55
3.6.3	Quadratische Funktionen	56
3.6.4	Potenzfunktionen und Wurfelfunktionen	58
3.6.5	Gebrochenrationale Funktionen	59
3.6.6	Trigonometrische Funktionen	60
3.6.7	Exponentialfunktionen	66
3.6.8	Logarithmusfunktionen	67
3.6.9	Weitere spezielle reelle Funktionen	69
4	Gleichungen und Gleichungssysteme	71
4.1	Lineare, quadratische, biquadratische Gleichungen	72
4.2	Gleichungen höheren Grades	74
4.3	Gleichungen mit absoluten Beträgen	77
4.4	Wurzelgleichungen	78
4.5	Goniometrische Gleichungen	79

4.6	Exponential- und Logarithmengleichungen	81
4.7	Lineare Gleichungssysteme	82
4.7.1	Gaußsches Eliminierungsverfahren	82
4.7.2	Lösbarkeit und Lösungsmenge von Gleichungssystemen	85
4.7.3	Determinanten; Regel von CRAMER	88
4.7.4	Homogene und inhomogene Gleichungssysteme	91
4.8	Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme	94
5	Grenzwerte und Stetigkeit	99
5.1	Grenzwerte und Konvergenz von Zahlenfolgen;	
	Grenzwertsätze	100
5.2	Reihen	104
5.3	Grenzwerte von Funktionen; Grenzwertsätze	107
5.4	Stetigkeit von Funktionen	110
6	Differenzialrechnung	113
6.1	Grundbegriffe der Differenzialrechnung	114
6.1.1	Ableitung einer Funktion	114
6.1.2	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	118
6.1.3	Ableitungen höherer Ordnung	119
6.2	Regeln zur Ableitung von Funktionen	120
6.2.1	Konstanten-, Potenz- und Faktorregel	120
6.2.2	Summen-, Produkt- und Quotientenregel	121
6.2.3	Kettenregel	123
6.2.4	Umkehrregel	124
6.2.5	Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung	125
6.2.6	Partielle Ableitung von Funktionen mit zwei Variablen	126
6.3	Ableitung elementarer Funktionen	127
6.3.1	Ableitung von Potenzfunktionen	127
6.3.2	Ableitung von trigonometrischen Funktionen	127
6.3.3	Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen	128
6.4	Sätze über differenzierbare Funktionen	132
6.5	Untersuchung von Funktionseigenschaften	136
6.5.1	Monotonieverhalten	136
6.5.2	Extrema	137
6.5.3	Krümmungsverhalten und Wendestellen	144
6.5.4	Verhalten im Unendlichen	148
6.5.5	Unstetigkeitsstellen	150
6.5.6	Beispiele für Funktionsuntersuchungen	153
6.6	Extremwertprobleme	159
6.7	Bestimmen von Funktionsgleichungen	162
6.7.1	Approximation durch Polynomfunktionen	162
6.7.2	Die Taylorsche Formel für ganzrationale Funktionen	166
6.7.3	Der Satz von TAYLOR	168
6.7.4	Das Verfahren der linearen Regression	171
6.8	Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen	174
6.8.1	Grafische Suche von Nullstellen	174
6.8.2	Bisektionsverfahren	175
6.8.3	Newtonsches Näherungsverfahren	176
6.8.4	Allgemeines Iterationsverfahren	177

7	Integralrechnung	179
7.1	Das unbestimmte Integral	180
7.1.1	Die Begriffe <i>Stammfunktion</i> und <i>unbestimmtes Integral</i>	180
7.1.2	Regeln für das Ermitteln von unbestimmten Integralen	182
7.2	Das bestimmte Integral	184
7.2.1	Flächeninhalt unter der Normalparabel	184
7.2.2	Der Begriff <i>bestimmtes Integral</i>	185
7.2.3	Begriffserweiterung und Eigenschaften bestimmter Integrale	189
7.3	Beziehung zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	191
7.3.1	Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze	191
7.3.2	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	192
7.4	Weitere Integrationsmethoden	193
7.4.1	Integration durch lineare Substitution	193
7.4.2	Integration durch nichtlineare Substitution	193
7.4.3	Partielle Integration	195
7.4.4	Integration durch Partialbruchzerlegung	195
7.5	Berechnen bestimmter Integrale; Anwendungen	197
7.5.1	Integrationsregeln	197
7.5.2	Ermitteln von Flächeninhalten	197
7.5.3	Physikalische Probleme	204
7.5.4	Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern; Bogenlänge von Kurven	208
7.6	Uneigentliche Integrale und nicht elementar integrierbare Funktionen	213
7.7	Numerische Integration	215
8	Differenzen- und Differenzialgleichungen	217
8.1	Differenzengleichungen	218
8.1.1	Die Begriffe <i>Differenzengleichung</i> und <i>Lösung einer Differenzengleichung</i>	218
8.1.2	Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	221
8.2	Differenzialgleichungen	224
8.2.1	Arten von Differenzialgleichungen	224
8.2.2	Lösungsverhalten von Differenzialgleichungen	225
8.2.3	Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen 1. Ordnung	228
8.2.4	Näherungsverfahren zur Lösung von Differenzialgleichungen 1. Ordnung	231
8.2.5	Lösen homogener linearer Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	232
9	Komplexe Zahlen	233
9.1	Komplexe Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen	234
9.2	Algebraische Darstellung komplexer Zahlen	236
9.3	Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen	238
9.4	Komplexe Zahlen in Exponentialform	240

10	Vektoren und Vektorräume	241
10.1	Zur Entwicklung der analytischen Geometrie	242
10.2	Vektoren; Gleichheit, Addition und Vervielfachung	243
10.3	Parallelität, Kollinearität und Komplanarität von Vektoren	249
10.4	Linearkombination von Vektoren; Basen in der Ebene und im Raum	250
10.5	Koordinatensysteme	254
10.6	Punkte, Strecken und Dreiecke in einem Koordinatensystem	260
10.6.1	Mittelpunkt einer Strecke in der Ebene und im Raum	260
10.6.2	Schwerpunkt eines Dreiecks	260
10.6.3	Betrag eines Vektors; Länge einer Strecke	261
10.6.4	Flächeninhalt eines Dreiecks	262
10.7	Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit	263
10.8	Skalarprodukt von Vektoren	265
10.8.1	Definition und Eigenschaften	265
10.8.2	Anwendungen des Skalarprodukts	268
10.9	Vektorprodukt und Spatprodukt von Vektoren	270
10.9.1	Vektorprodukt	270
10.9.2	Spatprodukt	271
10.10	Beweise unter Verwendung von Vektoren	274
10.11	Vektorräume	275
10.11.1	Der Begriff <i>Vektorraum</i>	275
10.11.2	Unterräume und Erzeugendensysteme	276
10.11.3	Basen und Dimension von Unterräumen	277
11	Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes	279
11.1	Geraden in der Ebene und im Raum	280
11.1.1	Punktgleichung einer Geraden	280
11.1.2	Zweipunktgleichung einer Geraden	283
11.1.3	Normalform der Gleichung einer Geraden in der Ebene	284
11.1.4	Lagebeziehungen von Geraden	286
11.1.5	Orthogonalität und Schnittwinkel von Geraden der Ebene	290
11.2	Ebenen im Raum	292
11.2.1	Gleichung einer Ebene in Vektorform	292
11.2.2	Gleichung einer Ebene in Koordinatenschreibweise	293
11.2.3	Hessesche Normalform der Ebenengleichung	296
11.2.4	Spezielle Ebenen	297
11.2.5	Lagebeziehungen von Gerade und Ebene	299
11.2.6	Lagebeziehungen von zwei Ebenen	302
11.3	Schnittwinkelberechnungen	305
11.3.1	Schnittwinkel zweier Geraden im Raum	305
11.3.2	Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	306
11.3.3	Schnittwinkel zweier Ebenen	306
11.4	Abstandsrechnungen	308
11.4.1	Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene und von einer Ebene im Raum	308
11.4.2	Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum	310
11.4.3	Abstand von Geraden im Raum	311
11.4.4	Abstand von Ebenen	314

11.5	Kreise und Kugeln	315
11.5.1	Gleichungen von Kreis und Kugel	315
11.5.2	Kreis und Gerade	319
11.5.3	Lagebeziehungen von Kreisen	320
11.5.4	Lagebeziehungen von Kugeln, Geraden und Ebenen	321
11.6	Kegelschnitte	325
11.6.1	Schnittfiguren eines Kegels	325
11.6.2	Ellipse	326
11.6.3	Hyperbel	329
11.6.4	Parabel	331
12	Matrizen	333
12.1	Der Begriff <i>Matrix</i>	334
12.2	Rechnen mit Matrizen	337
12.2.1	Addition und skalare Vervielfachung von Matrizen	337
12.2.2	Multiplikation von Matrizen	338
12.2.3	Bilden inverser Matrizen	342
12.3	Rang einer Matrix; Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme	344
12.4	Lineare Abbildungen	346
13	Wahrscheinlichkeitstheorie	349
13.1	Zufallsexperimente	350
13.1.1	Ein- und mehrstufige Zufallsexperimente; Ergebnismengen	350
13.1.2	Zufällige Ereignisse; Verknüpfen von Ereignissen	352
13.1.3	Absolute und relative Häufigkeiten; empirisches Gesetz der großen Zahlen	354
13.1.4	Wahrscheinlichkeitsverteilung; Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	355
13.1.5	Vier- und Mehrfeldertafeln; Zerlegungen der Ergebnismenge	358
13.2	Gleichverteilung (LAPLACE-Experimente)	360
13.2.1	Der Begriff <i>Gleichverteilung</i>	360
13.2.2	Rechenregel für die Gleichverteilung (LAPLACE-Regel)	361
13.2.3	Pfadregeln	362
13.2.4	Zählprinzip bei k-Tupeln	363
13.2.5	Zählprinzip bei n-elementigen Mengen	366
13.2.6	Urnenmodelle; Ziehen mit und ohne Zurücklegen; hypergeometrische Verteilung	367
13.2.7	Simulation mithilfe von Zufallszahlen	370
13.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	373
13.3.1	Der Begriff <i>bedingte Wahrscheinlichkeit</i>	373
13.3.2	Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten	374
13.3.3	Unabhängigkeit von Ereignissen	376
13.4	Zufallsgrößen	378
13.4.1	Endliche Zufallsgrößen	378
13.4.2	Erwartungswert	380
13.4.3	Streuung	382
13.5	Binomialverteilung	386
13.5.1	BERNOULLI-Experimente	386

13.5.2	BERNOULLI-Ketten; binomialverteilte Zufallsgrößen	387
13.5.3	Grafische Veranschaulichung der Binomialverteilung	389
13.5.4	Tabellierungen zur Binomialverteilung	392
13.5.5	Erwartungswert und Streuung binomialverteilter Zufallsgrößen	396
13.5.6	Grenzwertsatz von MOIVRE-LAPLACE zur Binomialverteilung	398
13.5.7	Normalverteilung	401
13.5.8	Zentraler Grenzwertsatz	406
14	Beschreibende und beurteilende Statistik	407
14.1	Beschreibende Statistik	408
14.1.1	Zu Anliegen und geschichtlicher Entwicklung der beschreibenden Statistik	408
14.1.2	Kenngößen statistischer Erhebungen	408
14.2	Beurteilende Statistik	414
14.2.1	Zu Anliegen und geschichtlicher Entwicklung der beurteilenden Statistik	414
14.2.2	Grundprobleme des Testens von Hypothesen	414
14.2.3	Alternativtests	418
14.2.4	Signifikanztests	425
15	Rechenhilfsmittel	429
15.1	Geschichtlicher Abriss	430
15.2	Elektronische Hilfsmittel	433
15.2.1	Grafikfähige Taschenrechner	433
15.2.2	Computeralgebrasysteme	436
15.2.3	Tabellenkalkulationen	440
15.2.4	Dynamische Geometriesoftware	443
Anhang		445
Kurze Einführung in das Computeralgebrasystem <i>Mathcad</i>		446
Register		452